

POTENCIAL ELECTRICO

3-1. Definición

3-2. Diferencia de potencial

3-3. Potencial debido a una carga puntual

3-4. Diferencia de potencial debido a una carga puntual

3-5. Potencial proveniente de un sistema de cargas puntuales

3-6. Unidades de medida del potencial electrostático

3-7. Potencial eléctrico y energía mutua

3-8. Potencial y energía mutua. Generalización

3-9. Relación entre el potencial y el campo eléctrico

3-10. Superficies equipotenciales

3-11. Cálculo de \vec{E} a partir de \bar{V}

3-12. Potencial proveniente de un sistema de carga puntuales

3-13. Cálculo del potencial eléctrico

3-14. Cálculo del potencial de un dipolo

3-15. Dipolo sumergido en un campo eléctrico

C-1. Gradiente del potencial eléctrico

C-2. Sucesión de dipolos elementales

C-3. Inducción electrostática y potencial

C-4. Energía mutua de un sistema de conductores

C-5. Energía y densidad de energía

C-6. Temas de lectura

POTENCIAL ELECTRICO

3-1. Definición

El campo eléctrico que rodea a una barra cargada, por ejemplo, vimos que podía describirse mediante una magnitud vectorial que es la intensidad de campo eléctrico E . También puede describirse a través de una cantidad escalar llamada *potencial eléctrico*, y que se simboliza con la letra V . Ambas cantidades E y V están íntimamente relacionadas.

Hemos visto que al formar un sistema de cargas se crea energía potencial electrostática equivalente al trabajo hecho para formarlo, Capítulo 2 punto 2-13. El trabajo de formación no depende de la trayectoria que siguen las cargas hasta alcanzar su posición final, sino solamente de la posición final. Esto permite desarrollar una generalización a partir de la energía potencial electrostática.

La generalización consiste en atribuir a todo punto del campo eléctrico un estado potencial de energía.

Se define como potencial eléctrico en un punto cualquiera del espacio del campo eléctrico como el trabajo realizado por una fuerza o agente externo en colocar una carga de prueba en dicho punto dividido por el valor de la carga de prueba (es decir trabajo por unidad de carga).

$$V_p = \frac{W}{q_0} \quad \text{en donde } q_0 \text{ es la carga de prueba} \quad (3-1)$$

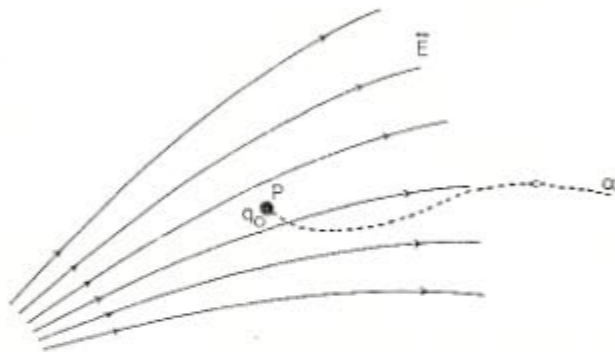


Figura 3-1

De esta forma se puede prever que energía potencial existirá cuando en dicho punto se coloque una carga eléctrica q , por lo tanto

$$W = V_p \cdot q \quad (3-2)$$

3-2. Diferencia de potencial

Si durante el proceso de mover la carga de prueba para determinar el potencial fijamos nuestra atención en el hecho fundamental de que la trayectoria de la fuerza puede ser cualquiera, entonces entre dos puntos cualesquiera fijos A y B a causa de que por ellos pasa siempre una cualquiera de las infinitas trayectorias posibles, sus potenciales V_A y V_B expresan por diferencia $V_A - V_B$ el trabajo siempre constante en llevar una carga de prueba desde el punto A hasta B, cualquiera sea el camino.

$$V_B - V_A = \Delta V = \frac{W_{AB}}{q_0} \quad (3-3)$$

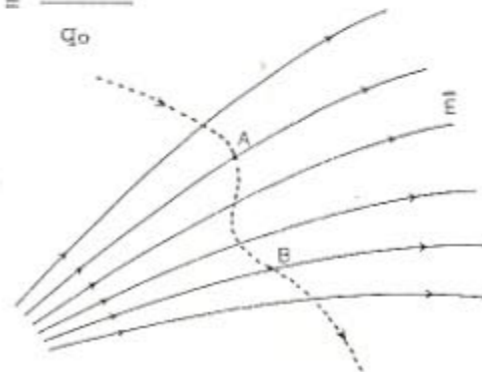


Figura 3-2

Entonces cuando entre dos puntos se transfiere una carga no unitaria q , el trabajo efectuado W_{AB} en el sentido de A hacia B resultará tantas veces mayor que la diferencia de potencial (ddp) como unidades tenga la carga q .

$$W_{AB} = q \Delta V = q (V_B - V_A) \quad (3-4)$$

Si el potencial de A hacia B aumenta entonces $W_{AB} > 0$ y el trabajo positivo lo realiza la fuerza externa en contra de la fuerza coulombiana. Si por el contrario el potencial desde A hacia B disminuye, $W_{AB} < 0$, y el trabajo positivo lo realiza la fuerza coulombiana. Si finalmente los potenciales de A y B son iguales, entonces $W_{AB} = 0$, entonces diremos que los puntos A y B son *equipotenciales*.

3-3. Potencial debido a una carga puntual

Consideremos la figura 3-3, en la que q (puntual y positiva) es la carga creadora del campo eléctrico y q_0 (puntual y positiva) es una carga de prueba.

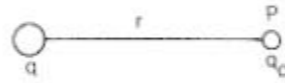


Figura 3-3

El potencial en el punto P determinado por el radiovector r quedará determinado según la definición de potencial por el trabajo realizado por una fuerza externa en traer desde el infinito la carga de prueba q_0 a dicho punto.

$$W = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{q q_0}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{r} \quad (3-5)$$

Designado con V al potencial en el punto P, se tiene

$$V_P = \frac{W}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (3-6)$$

Supondremos la siguiente restricción para el empleo de la ecuación 3-6, y es que la carga q se supone mucho más grande que la carga de prueba q_0 .

El potencial electrostático tiene un significado similar al potencial del campo gravitatorio. La fuerza coulombiana que se deriva del potencial eléctrico es análoga a la fuerza newtoniana con la diferencia que esta última es siempre atractiva.

Como existen dos clases de cargas eléctricas, positiva y negativa, el potencial eléctrico en un punto lleva el signo de la carga creadora del efecto coulombino, es decir



Figura 3-4

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(+q)}{r} \quad (3-7)$$

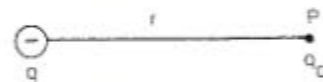


Figura 3-5

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-)q}{r} \quad (3-8)$$

3-4. Diferencia de potencial debido a una carga puntual

Calcularemos ahora la diferencia de potencial en el campo eléctrico creado por una carga puntual, según se observa en la figura 3-6.

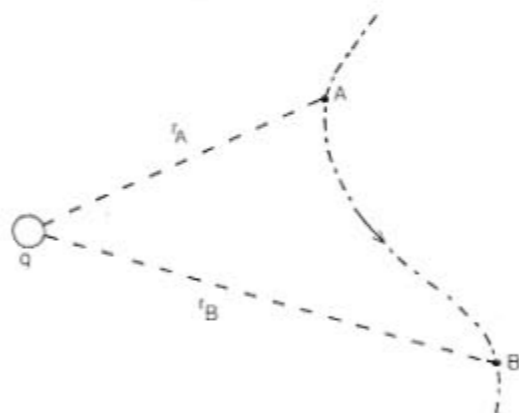


Figura 3-6

El potencial en el punto A y B resulta

$$V_A = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{r_A} \frac{q}{r^2} dr \quad (3-9)$$

$$V_B = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{r_B} \frac{q}{r^2} dr \quad (3-9)$$

La diferencia de potencia entre A y B, es decir $V_A - V_B$ es

$$V_B - V_A = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{r_B} \frac{q}{r^2} dr - \left(- \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{r_A} \frac{q}{r^2} dr \right)$$

$$V_B - V_A = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{q}{r^2} dr$$

$$V_B - V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_B} - \frac{q}{r_A} \right) \quad (3-10)$$

3-5. Potencial proveniente de un sistema de cargas puntuales

En un espacio sometido a la acción simultánea de varias cargas fijas constantes y puntuales, cada punto manifiesta un potencial que se obtiene como resultado de la suma algebraica del potencial producido por cada carga.

Esto es consecuencia de dos principios fundamentales

- Principio de la conservación de la energía. La energía total de un sistema es la suma de las energías individuales que contiene.
- Principio de independencia de las acciones de las fuerzas que nos permite hallar una resultante sobre un sistema sometido a la acción simultánea de varias fuerzas.

En la figura 3-7 se representa un sistema formado por N cargas, en el cual se determina el potencial producido por las N cargas en el punto P.

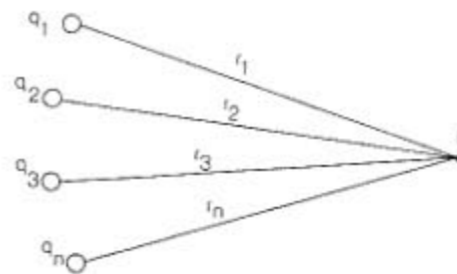


Figura 3-7

$$V_P = \sum_{i=1}^n V_{iP} \quad (3-11)$$

3-6. Unidades de medida del potencial electrostático

En el sistema MKSA la unidad de potencial se define al VOLT (V).

$$\text{Volt} = \frac{\text{Joule}}{\text{Coul}}$$

Supongamos tener una carga de 1 coulomb y calculemos el potencial en un punto P que se halla situado a 1 metro de distancia

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = 9 \times 10^9 \frac{\text{N m}^2}{\text{coul}^2} \frac{1 \text{ coul}}{1 \text{ m}} = 9 \times 10^9 \frac{\text{N m}}{\text{coul}}$$

$$V_p = 9 \times 10^9 \frac{\text{Joule}}{\text{coul}} = 9 \cdot 10^9 \text{ volt}$$



Figura 3-8

3-7. Potencial eléctrico y energía mutua

Vamos a introducir al concepto de potencial una nueva expresión denominada *energía mutua*.

Comenzamos con un caso muy simple que es un sistema formado por dos cargas q_1 y q_2 separadas una distancia r .

Según vimos anteriormente, ecuación 3-5, que el trabajo necesario para formar este sistema es

$$W = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^r \frac{q_1 q_2}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$$

A la expresión anterior la podemos escribir de dos maneras

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r} q_1 = q_1 V_1$$

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r} q_2 = q_2 V_2$$

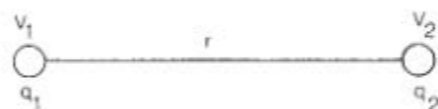


Figura 3-9

Finalmente, si sumamos las ecuaciones anteriores podemos escribir

$$W = 1/2 (q_1 V_1 + q_2 V_2) \quad (3-12)$$

Siendo V_1 el potencial que crea la carga q_2 en el punto donde está ubicada q_1 , y V_2 es el potencial que crea la carga q_1 en el punto donde está ubicada la carga q_2 .

3-8. Potencial y energía mutua. Generalización

Vimos que la energía mútua de formación de un sistema de tres cargas de manera generalizada (ecuación 2-41) era

$$W_{123} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad \text{para } i \neq j$$

Desarrollando la sumatoria tenemos que

$$W_{123} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_1}{r_{21}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_3 q_1}{r_{31}} + \frac{q_3 q_2}{r_{32}} \right)$$

Esto lo podemos escribir de la siguiente manera

$$W_{123} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \left[q_1 \left(\frac{q_2}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{13}} \right) + q_2 \left(\frac{q_1}{r_{21}} + \frac{q_3}{r_{23}} \right) + q_3 \left(\frac{q_1}{r_{31}} + \frac{q_2}{r_{32}} \right) \right]$$

Se observa que cada paréntesis representa el potencial resultante que crean sobre la posición de cada carga las $n-1$ cargas restantes del sistema.

Llamando V_1 , V_2 y V_3 respectivamente a dichos potenciales se tiene que

$$W_{123} = 1/2 (q_1 V_1 + q_2 V_2 + q_3 V_3)$$

o sea

$$W_{123} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 q_i v_i \quad (3-13)$$

El potencial en cada carga se puede escribir también de la siguiente forma general

$$v_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^3 \frac{q_j}{r_{ij}} \quad \text{para } i \neq j \quad (3-14)$$

3-9. Relación entre el potencial y el campo eléctrico

Estableceremos la relación entre V y E en el caso general en que el campo eléctrico no es uniforme y en que el cuerpo de prueba se mueve a lo largo de una trayectoria que no es rectilínea desde A hacia B .

El campo eléctrico ejerce sobre la carga de prueba una fuerza $q_0 E$. Para evitar que la carga de prueba se acelere, un agente externo debe aplicar una fuerza externa $F = -q_0 E$ en todas las posiciones que el cuerpo de prueba adopta a lo largo de la trayectoria AB .

Si el agente externo produce un desplazamiento $d\bar{l}$ en el cuerpo de prueba a lo largo de la trayectoria podemos escribir

$$dW = \bar{F} \cdot d\bar{l} = -q_0 \bar{E} \cdot d\bar{l}$$

$$W_{AB} = -q_0 \int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{l} \quad (3-15)$$

$$V_{BA} = V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_0} = - \int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{l} \quad (3-16)$$

Si el punto A se encontrara en el infinito y su potencial se toma como cero, obtendremos el potencial absoluto en el punto B , por lo tanto

$$V = - \int_{\infty}^B \bar{E} \cdot d\bar{l} \quad (3-17)$$

Las dos últimas expresiones nos permiten calcular la diferencia de potencial entre dos puntos y el potencial en un punto si se conoce E para diferentes puntos del campo.

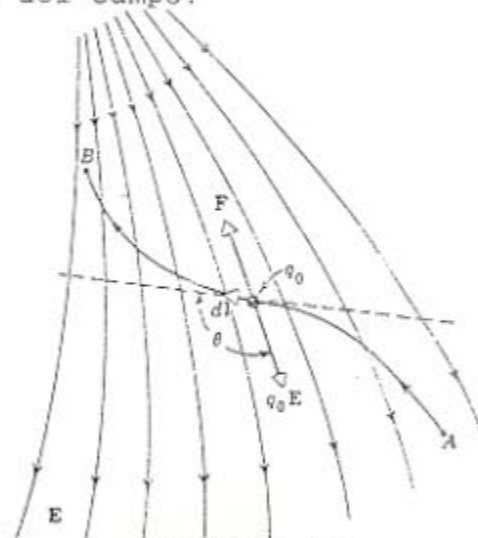


Figura 3-10

3-10. Superficies equipotenciales

En un campo eléctrico, el lugar geométrico de todos los puntos que tiene el mismo potencial determinan una superficie que en general es curva, llamada superficie equipotencial.

Aquellos campos vectoriales que dividen al espacio en láminas por medio de las superficies equipotenciales se los llaman *campos laminares*. El campo eléctrico es un campo laminar.

Cuando una carga de prueba se mueve sobre una superficie equipotencial no es necesario realizar trabajo para moverla sobre dicha superficie. Por lo tanto se deduce que el campo eléctrico sobre los puntos de una superficie equipotencial es siempre perpendicular a ella.

Las líneas de fuerza y las superficies equipotenciales son, en consecuencia perpendiculares entre sí.

Se ha demostrado que en un cuerpo conductor cargado las líneas de fuerza en la superficie son perpendiculares al conductor. Por lo tanto la superficie del conductor cargado es una superficie equipotencial.

A continuación se representan superficies equipotenciales para distintas configuraciones de carga.



Figura 3-11

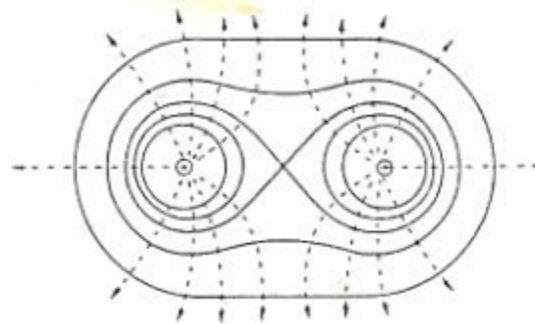


Figura 3-12

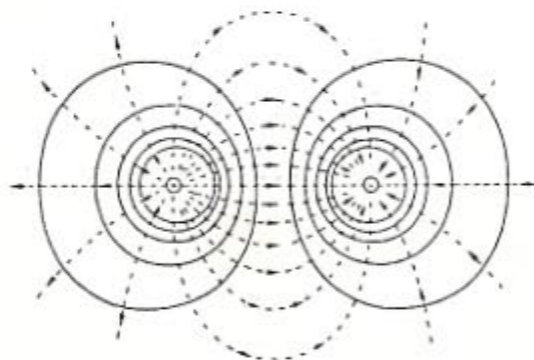


Figura 3-13

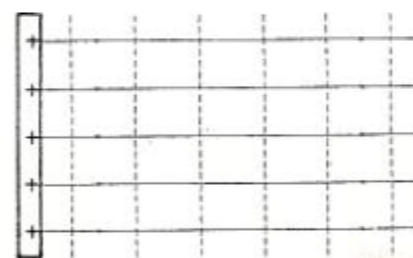


Figura 3-14

3-11. Cálculo de \vec{E} a partir de V .

La figura 3-15 muestra la intersección de una familia de una familia de superficies equipotenciales con el plano de la hoja. En el punto P el campo eléctrico E es perpendicular a la superficie equipotencial que pasa por P .

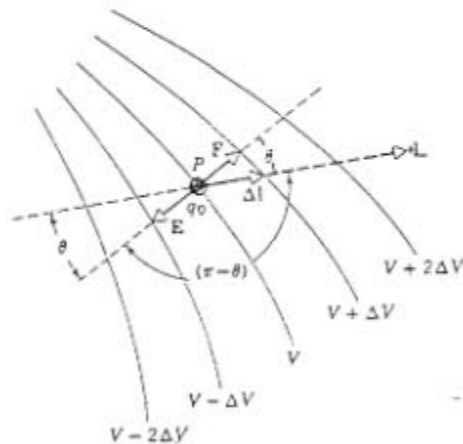


Figura 3-15

Supongamos tener una carga de prueba q_0 que se mueve desde P , a lo largo de la trayectoria marcada por ΔL , hasta la superficie equipotencial $V + \Delta V$ bajo la acción de una fuerza externa F .

Supongamos que $F = -q_0 \cdot E$ en todo instante y por lo tanto q_0 se moverá sin aceleración. Por lo tanto podemos escribir

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{L}$$

$$\Delta W = -q_0 \vec{E} \cdot \Delta \vec{L} = -q_0 E \Delta L \cos(\pi - \theta) = q_0 E \Delta L \cos \theta$$

De acuerdo a la definición de potencial podemos escribir que el trabajo es

$$\Delta W = q_0 \Delta V = q_0 E \Delta L \cos \theta$$

$$E \cos \theta = \frac{\Delta V}{\Delta L}$$

Ahora bien $E \cos \theta$ es la componente del campo eléctrico según la dirección de $-L$ (E_{-L}). Por lo tanto la componente de E según la dirección de $+L$ en el sentido del potencial creciente será

$$E_{+L} = -\frac{\Delta V}{\Delta L}$$

En el límite diferencial puede escribirse como

$$E_L = - \frac{dV}{dL} \quad (3-18)$$

Esta última ecuación dice, en palabras, que si se viaja a través del campo eléctrico a lo largo de una línea recta y se mide V conforme avanza, la componente de E en esa dirección es el ritmo del cambio observado en V con la distancia, con signo contrario. El signo negativo implica que E apunta en la dirección en la que V disminuye.

Consideremos el siguiente ejemplo, mostrado en la figura 3-16, en el cual vamos a calcular el campo eléctrico $E(x)$ para una carga puntual q .

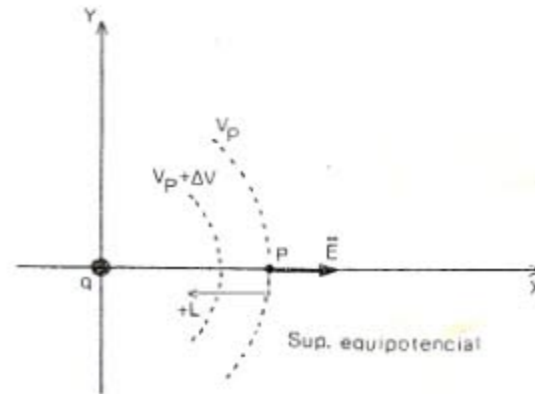


Figura 3-16

Como vimos anteriormente el potencial de una carga puntual q estaba dado por la expresión 3-6

$$V_P = \frac{W}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x}$$

Además sabemos que en el punto P el cambio que experimenta V con la distancia será máximo en la dirección de x , por lo tanto

$$E = - \frac{dV}{dL} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(- \frac{q}{x^2} \right)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{x^2}$$

Este resultado concuerda perfectamente con la expresión de campo eléctrico de una carga puntual que ya conocíamos.

3-12. Potencial proveniente de un sistema de carga puntuales

El potencial que produce un grupo de cargas puntuales en un punto dado se encuentra calculando los potenciales V_n debido a cada una de las cargas como si las demás cargas no existieran y luego sumando esas cantidades algebraicamente.

$$V = \sum_n V_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_n \frac{q_n}{r_n} \quad (3-11)$$

en donde q_n es el valor de la n -ésima carga y r_n es la distancia de esta carga al punto en cuestión.

La sumatoria a realizar es una *suma algebraica* y no una suma vectorial como la que se realiza para calcular E debido a un grupo de cargas puntuales.

Esto es una ventaja de cálculo que tiene el potencial con respecto al campo eléctrico. Por lo tanto es casi siempre más sencillo realizar el cálculo del potencial y derivado de él calcular el campo eléctrico.

Si la distribución de carga no es puntual (discreta) y por el contrario es continua la sumatoria puede reemplazarse por una integración, es decir

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} \quad (3-19)$$

en donde dq es un elemento diferencial de la distribución de carga y r su distancia al punto en cuestión.

3-13. Cálculo del potencial eléctrico

3-13-1. Cálculo del potencial de un disco cargado uniformemente

Calcularemos el potencial en un punto P sobre el eje del disco a una distancia x tal como se muestra en la figura 3-17

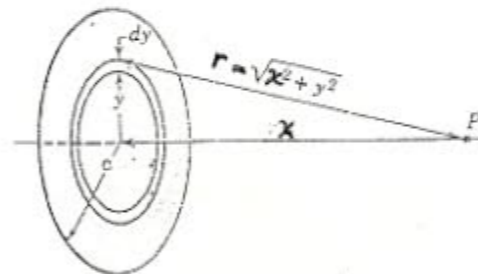


Figura 3-17

El disco posee una densidad de carga superficial constante cuyo valor está dada por la siguiente expresión

$$\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$$

en donde q es la carga total depositada en el disco y R el radio del disco dieléctrico.

Consideremos una franja circular de radio y , y ancho dy sobre la cual existe una carga dq , entonces

$$dq = \sigma 2 \pi y dy$$

todá la carga dq se encuentra a la misma distancia r del punto P por lo tanto

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}$$

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 2 \pi y dy}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

integrando sobre todas las franjas en las cuales se puede dividir el disco resulta

$$V = \int dV = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \int_0^R \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} dy = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \left[(x^2 + y^2)^{1/2} \right]_0^R$$

$$V = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \left[(x^2 + R^2)^{1/2} - x \right] \quad (3-20)$$

El campo eléctrico en el punto P debe tener la dirección de x por lo tanto podemos calcular E aplicando la expresión 3-18

$$E = - \frac{dV}{dx}$$

reemplazando la expresión 3-20 y derivando

$$E = - \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \left[\frac{1}{2} (x^2 + R^2)^{-1/2} 2x - 1 \right]$$

$$E = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \right] \quad (3-21)$$

3-13-2. Cálculo del potencial de una esfera metálica electrizada

Calcularemos el potencial en un punto P exterior a la esfera, tal como se muestra en la figura 3-18.

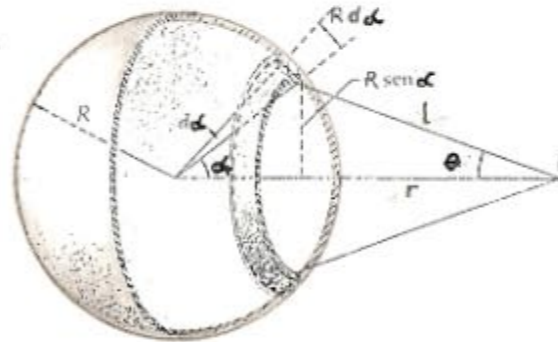


Figura 3-18

La esfera posee una densidad de carga superficial constante cuyo valor está dada por la siguiente expresión

$$\sigma = \frac{q}{4 \pi R^2}$$

Tomamos un elemento de superficie dS en la forma de un segmento esférico que dista una distancia l del punto P y cuya área es

$$dS = 2 \pi R \operatorname{sen} \alpha R d\alpha = 2 \pi R^2 \operatorname{sen} \alpha d\alpha$$

La carga colocada en ds es dq y vale

$$dq = \sigma dS = 2 \pi R^2 \sigma \operatorname{sen} \alpha d\alpha$$

El potencial que la carga dq produce en el punto P vale

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{l}$$

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2 \pi R^2 \sigma \operatorname{sen} \alpha d\alpha}{l}$$

Hacemos ahora la siguiente transformación con el objeto de expresar el potencial en función de una sola variable.

$$l^2 = r^2 + R^2 - 2 r R \cos \alpha \quad (\text{por Teorema del coseno})$$

Derivando la última expresión respecto de a (dl/da), tenemos

$$2 l dl = 2 r R \operatorname{sen} a da$$

de donde

$$\frac{\operatorname{sen} a da}{l} = \frac{dl}{r R}$$

reemplazando resulta

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2 \pi \sigma R^2}{r R} dl$$

El potencial debido a todas las cargas de la superficie será

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2 \pi \sigma R}{r} \int_{r-R}^{r+R} dl$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2 \pi \sigma R}{r} \left| l \right|_{r-R}^{r+R} = \frac{\sigma R}{2 \epsilon_0 r} \cdot 2 R$$

$$V = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} \quad (3-22)$$

Reemplazando a la densidad de carga superficial σ por

$$\sigma = \frac{q}{4 \pi R^2}$$

en la expresión 3-22, obtenemos

$$V = \frac{q}{4 \pi R^2} \frac{R^2}{\epsilon_0 r}$$

$$V = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (3-23)$$

Observando la ecuación 3-23, vemos que el potencial en un punto exterior a la esfera resulta como si toda la carga estuviera concentrada en el centro (se comporta como si existiera una carga puntual ubicada en el punto O).

El valor del campo eléctrico E en el punto P se encuentra aplicando la expresión 3-18

$$E = - \frac{dV}{dx}$$

reemplazando la expresión 3-23 y derivando

$$E = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (3-24)$$

Donde vale la misma consideración que se realizó para el potencial. El campo eléctrico se comporta de manera similar que para una carga puntual.

3-13-3. Cálculo del potencial en el interior de una esfera metálica electrizada

El desarrollo se basa en lo realizado anteriormente para la determinación del potencial en el exterior de una esfera metalizada, punto 3-13-2. Tomando como base al esquema 3-18, la expresión diferencial de V es la misma que para un punto exterior, solamente cambian los límites de integración.

El potencial debido a todas las cargas de la superficie será, según la expresión

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi\sigma R}{r} \int_{R-r}^{R+r} dl$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi\sigma R}{r} \left| l \right|_{R-r}^{R+r} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 r} \cdot 2r$$

$$V = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} = \text{constante} \quad (3-25)$$

Reemplazando a la densidad de carga superficial σ por

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$$

en la expresión 3-25, obtenemos

$$V = \frac{q}{4\pi R^2} \frac{R}{\epsilon_0}$$

$$V = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q}{R} \quad (3-26)$$

De la última expresión se desprende que en el interior de la esfera el potencial tiene un valor constante, igual al valor que posee la misma en la superficie.

El valor del campo eléctrico E en un punto P interior a la esfera conductora se encuentra aplicando la expresión 3-18

$$E = - \frac{dV}{dx}$$

Debido a que la función 3-26 es una constante entonces su derivada es nula, es decir

$$V = \text{constante}$$

$$E = 0$$

En otras palabras, *no existe campo eléctrico en el interior de una esfera conductora cargada*. Este resultado se puede generalizar para cualquier superficie conductora cerrada; de aquí deriva la propiedad de la *Jaula de Faraday* y de la *pantalla electrostática*.

Resumiendo, esta última expresión puede generalizarse para un cuerpo conductor de cualquier forma (no necesariamente esférico) y además hueco (no necesariamente macizo), porque las cargas en equilibrio electrostático están sobre la superficie exterior del conductor, tal como se vio en el *Capítulo 2, Punto 2-12 Conductor aislado*.

A continuación se representan de manera gráfica los resultados obtenidos, en la figura 3-19 $V=f(r)$ y en la figura 3-20 $E=f(r)$.

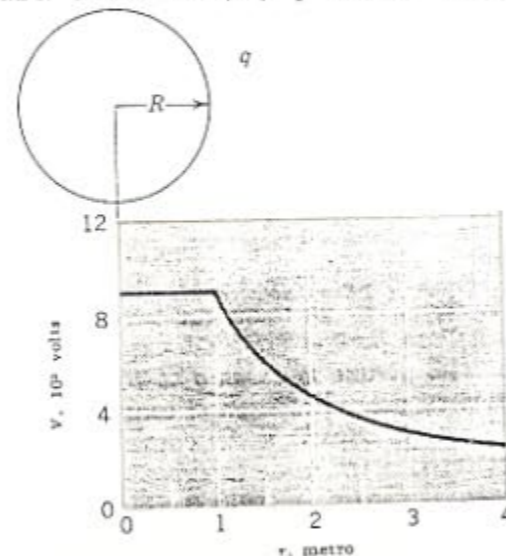


Figura 3-19

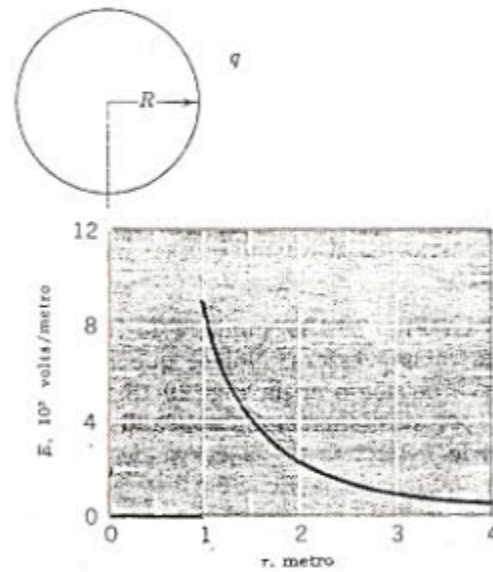


Figura 3-20

3-14. Cálculo del potencial de un dipolo

En el *Capítulo 2, Punto B-3*, se describió una disposición de cargas llamada *dipolo eléctrico*.

Calcularemos el potencial creado por un dipolo en un punto P muy alejado del dipolo ($r \gg l$), tal como se observa en la figura 3-21.

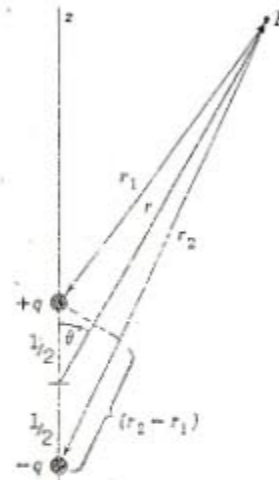


Figura 3-21

Utilizaremos para determinar la posición de P, coordenadas polares, r y θ , con origen en el punto medio del dipolo, y tracemos haciendo centro en P los arcos indicados. Si el punto P está suficientemente lejos del dipolo los arcos pueden considerarse como segmentos rectilíneos perpendiculares a la vez a r , r_1 y r_2 .

El potencial debido a las cargas q en el punto P es igual a

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right)$$

sacando factor común la carga q , y reemplazando los radios r_1 y r_2 en función de l y θ , obtenemos

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left(\frac{1}{r - l/2 \cos\theta} - \frac{1}{r + l/2 \cos\theta} \right)$$

de donde

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left(\frac{l \cos\theta}{r^2 - l^2/4 \cos^2\theta} \right)$$

y despreciando el término $l^2/4 \cos^2\theta$ frente a r^2 , resulta que

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q l \cos\theta}{r^2} \quad (3-27)$$

Se define como *momento del dipolo* o *momento dipolar del dipolo* al producto de la carga positiva (q) por la distancia (l) que separa las cargas. Esta magnitud interpretada como vector tiene su dirección coincidente con la de la longitud (l) y su sentido el que va de la carga **negativa** ($-q$) a la carga **positiva** ($+q$), su símbolo es \bar{p} , por lo tanto

$$\bar{p} = q \cdot \bar{l} \quad (3-28)$$

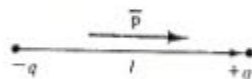


Figura 3-22

reemplazando la expresión 3-28 en la ecuación 3-27, tenemos

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2} \quad (3-29)$$

y siendo θ el ángulo que hace \bar{p} con el radio \bar{r} , la expresión 3-29 se convierte en la siguiente

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2} \frac{r}{r}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p r \cos\theta}{r^3}$$

Por último

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{p} \cdot \bar{r}}{r^3} \quad (3-30)$$

Esta igualdad permite conocer el potencial en un punto del campo del dipolo suficientemente alejados como para poder justificar las simplificaciones realizadas.

Podemos observar que el signo del potencial es función del producto escalar y en consecuencia depende del $\cos\theta$.

Para la determinación del campo eléctrico que produce un dipolo en el punto P, seguiremos utilizando coordenadas polares. Por lo tanto las componentes del campo eléctrico son E_r y E_θ .

Teniendo en cuenta que en coordenadas polares una distancia ds en dirección radial es igual a dr , y una distancia ds perpendicular a r es $r d\theta$. Entonces tenemos que

$$\left(\frac{dV}{ds} \right)_{\substack{\text{radialmente} \\ s=\text{constante}}} = \frac{dV}{dr}$$

$$\left(\frac{dV}{ds} \right)_{\substack{\text{tangencialmente} \\ r=\text{constante}}} = \frac{dV}{r d\theta} = \frac{1}{r} \frac{dV}{d\theta}$$

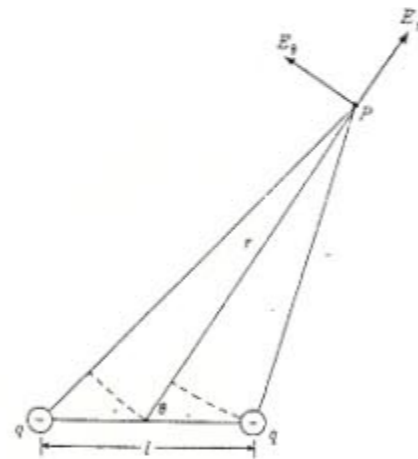


Figura 3-23

Entonces, el valor del campo eléctrico E en un punto P producido por el dipolo se encuentra aplicando la expresión 3-18

$$E = - \frac{dV}{dx}$$

Tomando como expresión del potencial a

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2}$$

y realizando las correspondientes derivadas obtenemos

$$E_r = - \frac{dV}{dr} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2 p \cos\theta}{r^3} \quad (3-31)$$

$$E_\theta = - \frac{1}{r} \frac{dV}{d\theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin\theta}{r^3} \quad (3-32)$$

Entonces el campo resultante en el punto P se obtendrá mediante

$$\bar{E} = \bar{E}_r + \bar{E}_\theta = - \text{grad } V \quad (3-33)$$

En la figura 3-24 se indican las líneas de campo a partir de un perímetro arbitrario (pero alejado del centro O del dipolo), y dibujadas de acuerdo a las expresiones de E_r y E_θ , ecuaciones 3-31 y 3-32 respectivamente.

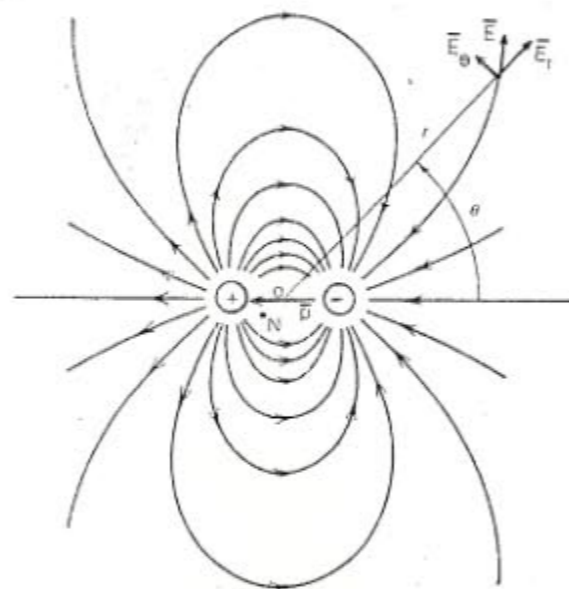


Figura 3-24

En puntos como el N que suponemos no muy alejados del centro del dipolo, el campo se calculará de acuerdo a la ley de Coulomb, es decir

$$\vec{E}_N = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1^2} \hat{r}_1 - \frac{q_2}{r_2^2} \hat{r}_2 \right) \quad (3-34)$$

la cual dará el valor correcto del campo eléctrico en dicho punto.

3-15. Dipolo sumergido en un campo eléctrico

3-15-1. Fuerzas ponderomotrices sobre el dipolo

Consideremos un dipolo eléctrico compuesto por dos cargas $+q$ y $-q$ separadas una distancia L . A los fines de simplificar el problema supondremos que el campo eléctrico externo que actúa sobre el dipolo es uniforme y que el momento dipolar del dipolo (p) forma un ángulo θ con la dirección del campo eléctrico (E) tal como se muestra en la figura 3-25.

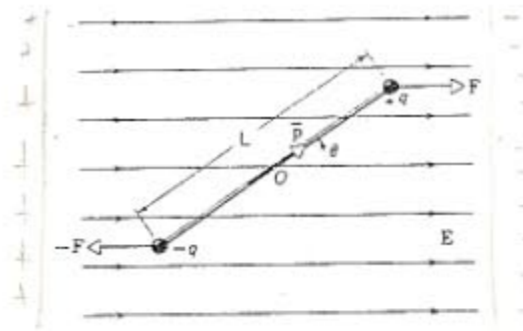


Figura 3-25

Las fuerzas que actúan sobre el dipolo son

$$\vec{F}_1 = q \vec{E} \quad \text{y} \quad \vec{F}_2 = -q \vec{E}$$

ambas tienen sentido opuestos pero son del mismo módulo, puesto que el campo eléctrico E es uniforme. La fuerza neta sobre el dipolo es por consiguiente cero. Sin embargo las dos fuerzas producen un par, que tiende a hacer girar al dipolo. El valor de la cupla es

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r} \quad (\text{producto vectorial})$$

$$\vec{M} = q \vec{E} \times \vec{L}$$

expresando esta última ecuación de manera escalar, tenemos

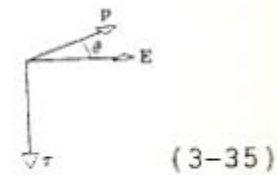
$$M = q E L \text{sen}\theta$$

pero el producto de $q \cdot L = p$ (momento dipolar), entonces

$$M = p E \operatorname{sen} \theta$$

expresando de manera vectorial esta ecuación, obtenemos

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (\text{producto vectorial})$$



(3-35)

Por lo tanto, un dipolo eléctrico colocado en un campo eléctrico externo E experimenta un momento que tiende a alinearlo con el campo eléctrico, tal como se observa en la figura 3-26.

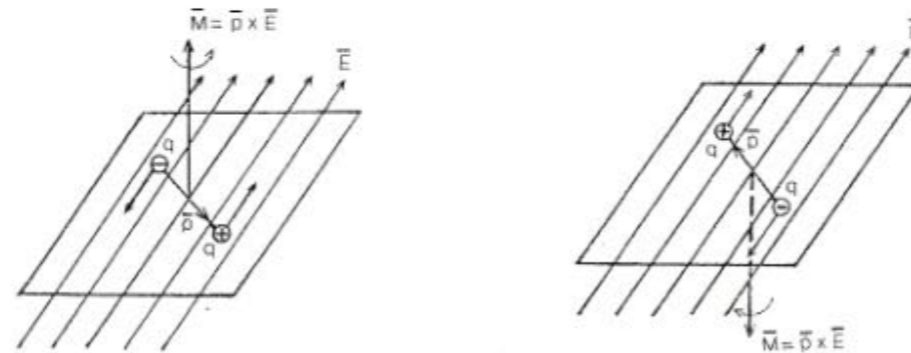


Figura 3-26

3-15-2. Energía de posición de un dipolo

Consideremos el dipolo mostrado en la figura 3-25 en donde se observa que el ángulo que forma el momento dipolar p , con la dirección del campo eléctrico E es θ_0 . El trabajo necesario para hacer girar el dipolo un ángulo θ , es decir desde θ_0 a θ_f , vale

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta_f} M \, d\theta$$

Reemplazando el momento M por la ecuación 3-35

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta_f} p \times E \, d\theta$$

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta_f} p E \operatorname{sen} \theta \, d\theta$$

$$W = p E \int_{\theta_0}^{\theta_f} \operatorname{sen} \theta \, d\theta$$

$$W = - p E \cos\theta \Big|_{\theta_0}^{\theta_f}$$

$$W = - p E (\cos\theta_f - \cos\theta_0)$$

$$W = - p E \cos\theta_f \quad (\text{para } \theta_0 = 90^\circ, \text{ condición inicial})$$

$$W = - \bar{p} \cdot \bar{E} \quad (\text{producto escalar}) \quad (3-36)$$

Esta ecuación supone que el campo eléctrico es uniforme en la región ocupada por el dipolo, o sea que el dipolo es muy pequeño porque la distancia L es en realidad un infinitesimal. También queda la posibilidad de interpretar a E como un valor medio del campo a lo largo de L .

La ecuación 3-36 hace ver que la energía de posición máxima corresponde a la coincidencia en dirección y de sentido opuesto de los vectores p y E para $\theta = 180^\circ$. La posición de energía mínima negativa corresponde para $\theta = 0^\circ$, la dirección y sentido de p y E coinciden; y nula para cuando $\theta = 90^\circ$, en donde p y E son perpendiculares. Estas condiciones están reflejadas en la figura 3-27.

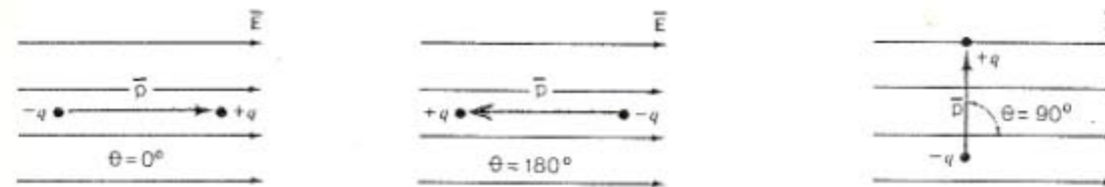


Figura 3-27

La posición de máxima energía es una posición de *equilibrio inestable* ya que al desviar ligeramente al dipolo de esta posición no vuelve a ella por sí sola, sino por el contrario comienza a girar hasta ubicarse en la posición de mínima energía.

En vez la posición de mínima energía es una posición de *equilibrio estable*, ya que al desviar ligeramente el dipolo de esta posición vuelve a ella por sí solo.

Esto se comprende perfectamente observando los dibujos mostrados en la figura 3-28.

En ellas se observa que desde la posición de máxima energía el dipolo puede girar a otra posición cualquiera por la acción de las fuerzas del campo. En otras palabras el dipolo dispone de energía para moverse.

En cambio desde la posición de mínima energía, el dipolo no puede moverse bajo la acción de las fuerzas del campo.



Figura 3-28

Hay que producir trabajo sobre él desde el exterior para llevarlo a otra posición.

La variación máxima de energía entre las posiciones extremas es

$$\Delta W_{\text{máx}} = \pm 2 E_p$$

en donde:

- +: cuando se lleva el dipolo de una posición de mínima energía a una posición de máxima energía.
- : cuando se lleva el dipolo de una posición de máxima energía a una posición de mínima energía.

Temas complementarios

C-1. Gradiente de potencial

Este tema es una extensión a lo visto en el punto 3-11, *Cálculo de E a partir de V* (página 11).

Partimos de la expresión 3-18

$$E_L = - \frac{dV}{dL}$$

En base a la ecuación 3-18 y la figura 3-15 tenemos que para

$$\theta = 0 \quad E_L = E$$

por lo tanto

$$E = - \left(\frac{dV}{dL} \right)_{\max}$$

El valor máximo de dV/dL en un punto recibe el nombre de *gradiente de potencial* en este punto.

La dirección de L para la cual dV/dL tiene su valor máximo siempre es perpendicular a la superficie equipotencial, lo cual corresponde a $\theta = 0$. Entonces

$$\left(\frac{dV}{dL} \right)_{\max} = \text{grad } V \quad (3-37)$$

ó

$$-\overline{\text{grad } V} = \overline{E} \quad (3-38)$$

Para poder aplicar esta expresión y que nos permita determinar E en función de V debemos conocer la función $V = V(x,y,z)$ y sus derivadas,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = (\text{grad } V)_x = -E_x \quad \overline{E}_x = -\overline{i} \frac{\partial V}{\partial x} \quad (3-39)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = (\text{grad } V)_y = -E_y \quad \overline{E}_y = -\overline{j} \frac{\partial V}{\partial y} \quad (3-40)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = (\text{grad } V)_z = - E_z \quad \bar{E}_z = - \bar{k} \frac{\partial V}{\partial z} \quad (3-41)$$

Por lo tanto el campo eléctrico \bar{E} lo podemos expresar de la siguiente forma

$$\bar{E} = - \left(\bar{i} \frac{\partial V}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial V}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial V}{\partial z} \right) \quad (3-42)$$

cuyo módulo es

$$E = \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3-43)$$

C-1-1. Operador Nabla

En el análisis vectorial es frecuente el uso de un *operador diferencial nabla* ∇ que en coordenadas cartesianas ortogonales, por definición convencional toma la forma

$$\nabla = \bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (3-44)$$

este operador tiene la apariencia formal de un vector, sin tener ningún significado hasta tanto no se lo haga operar sobre algo.

Si al operador nabla ∇ lo aplicamos sobre un vector se obtiene la *divergencia* de ese vector, lo cual es una magnitud escalar. Esto se profundizará en puntos posteriores aplicado al campo vectorial eléctrico.

Si al operador nabla ∇ lo aplicamos sobre una magnitud escalar obtenemos un vector el cual toma el nombre precisamente de gradiente de dicha magnitud escalar.

Apliquemos, ahora, el operador nabla ∇ a la función escalar o campo escalar $V(x,y,z)$

$$\begin{aligned} \nabla V &= \left(\bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot V \\ \nabla V &= \bar{i} \frac{\partial V}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial V}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned} \quad (3-45)$$

$$\nabla V = \overline{\text{grad } V}$$

$$\bar{E} = - \nabla V \quad (3-46)$$

C-2. Sucesión de dipolos elementales

Consideremos una sucesión de dipolos elementales, tal como se muestra en la figura 3-29. Veremos a continuación que esta alineación de dipolos produce el mismo potencial en un punto P suficientemente alejado que el dipolo formado por las cargas extremas.

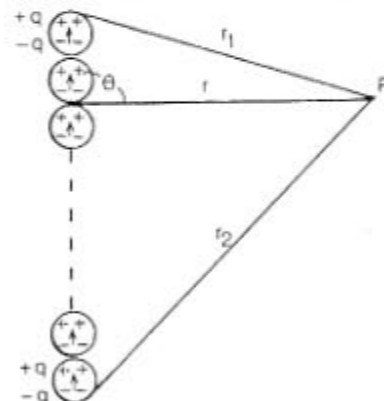


Figura 3-29

El potencial dV en un punto P, producido por un dipolo elemental, es según la ecuación 3-29, punto 3-14 *Cálculo del potencial de un dipolo*

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dp \cos\theta}{r^2}$$

pero el diferencial del momento dipolar del dipolo vale, según la expresión 3-28

$$dp = q dl$$

reemplazando

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q dl \cos\theta}{r^2}$$

y siendo

$$dr = dl \cos\theta$$

la variación del radiovector en cada tramo se podrá escribir

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q dr}{r^2}$$

El potencial total V en el punto P se determina ahora por integración entre los límites r_1 y r_2 , entonces

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (3-47)$$

y esta expresión es justamente el potencial en P producido por las cargas $+q$ y $-q$ en los extremos de r_1 y r_2 , es decir, de las cargas separadas por la distancia L formando el dipolo único de momento p . La intensidad de campo eléctrico $E = -\text{grad } V$ también justifica la equivalencia.

Como consecuencia podemos decir que la sucesión de dipolos elementales que representan una distribución espacial a lo largo de L , es equivalente a dos concentraciones de cargas $+q$ y $-q$ ubicadas en los extremos de L , esto es válido para puntos tales como P , alejados suficientemente del dipolo.

C-3. Inducción electrostática y potencial

Supongamos tener una esfera conductora cargada con una carga q . Sabemos que el potencial creado por la misma es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

y cuya variación representada gráficamente se muestra en la figura 3-30.

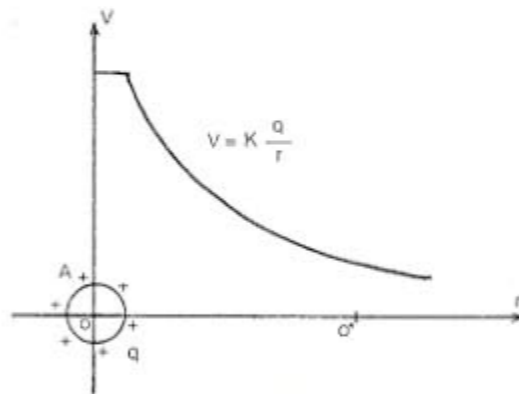


Figura 3-30

Coloquemos a continuación en el punto O' una esfera conductora B descargada. Sobre esta aparecerán cargas positivas y negativas por efecto de la inducción de la esfera A .

Como la esfera B tiene que ser equipotencial para que las cargas inducidas estén en equilibrio, dicha esfera debe adoptar un potencial único dentro del campo de la esfera inductora A y este valor único es el valor medio que tienen los puntos del espacio que ocupa la superficie de B , supuesta la esfera A sola.

La nueva distribución de potencial a la derecha de A se indica en la figura 3-31. Nótese que la distribución del potencial a la izquierda de A se halla prácticamente inafectada.

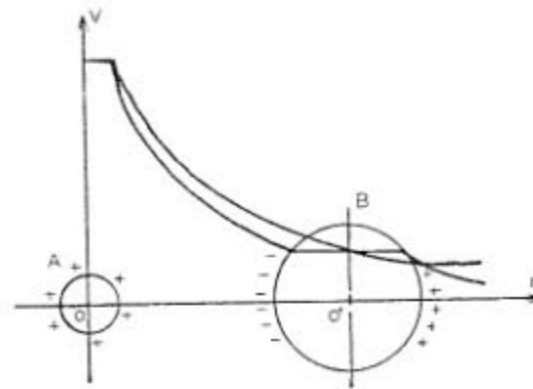


Figura 3-31

C-3-1. Inducción electrostática

Como una generalización del resultado del punto anterior y que la experiencia confirma en todos los casos, podemos decir

que un conductor hueco, cualquiera sea su forma, manifiesta en todos el espacio de su cavidad las siguientes condiciones

$$V_{int} = \text{constante} \quad E_{int} = 0$$

cualquiera sean las acciones eléctricas exteriores.

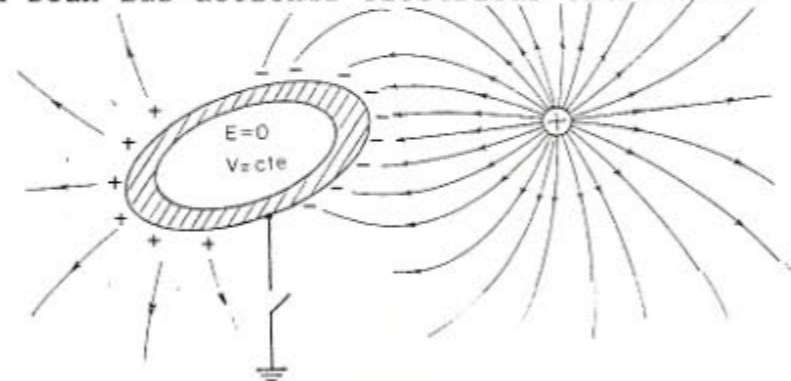


Figura 3-32

Si la posición del agente inductor cambia o incrementa su carga, el potencial en el conductor inducido cambia a otro valor $V_{int}' = \text{constante}$ pero siempre es $E_{int} = 0$.

Si la superficie exterior del conductor se conecta a tierra desaparecen sobre ella las cargas de igual signo que el agente inductor.

Se dice que el conductor hueco es una *pantalla electrostática* que no deja pasar al interior los fenómenos eléctricos que se verifican en su inmediata vecindad (esté o no unido a tierra).

Si dentro del conductor se coloca un agente inductor, por ejemplo una carga q_0 , sobre la superficie interior aparecerán cargas inducidas de valor $-q_0$ y sobre la superficie exterior las cargas $+q_0$ que crean un campo exterior.

Para eliminar este campo exterior inducido se debe conectar la superficie exterior a tierra, convirtiéndose ahora el conductor hueco en una pantalla electrostática que impide pasar al exterior las acciones eléctricas que ocurran en el interior del conductor hueco.

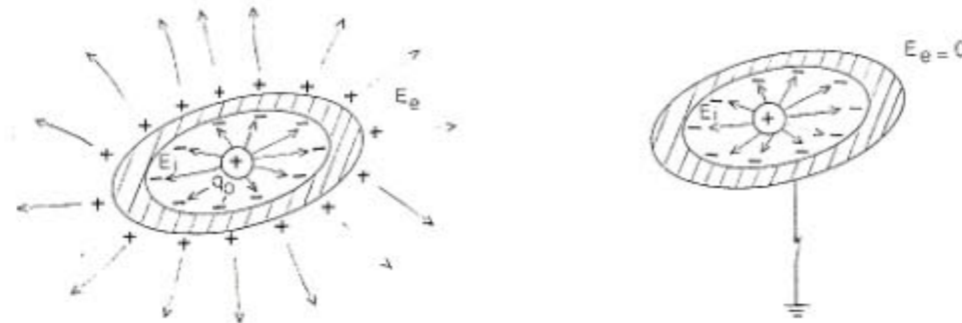


Figura 3-33

En todos los casos el campo en la masa del conductor es siempre nulo, es decir

$$E_{masa} = 0$$

A continuación realizaremos la siguiente experiencia.

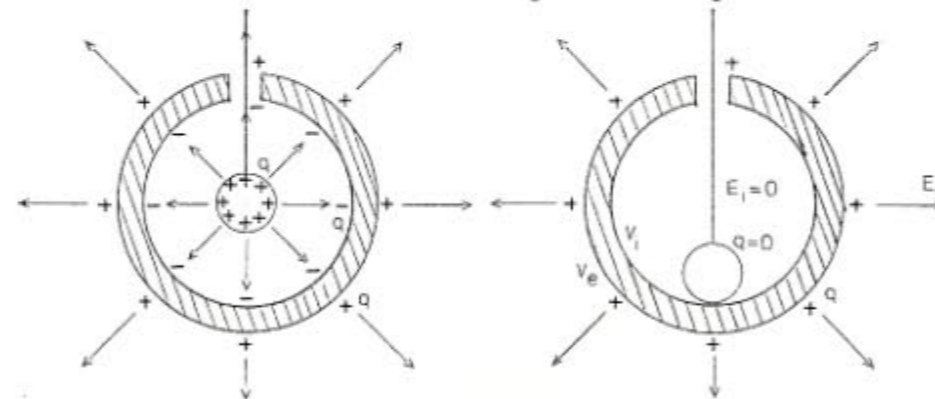


Figura 3-34

Coloquemos una esfera electrizada dentro de un conductor hueco descargado y luego desplazemos la esfera interior hasta tocar la superficie interior del conductor hueco. Las cargas negativas inducidas sobre ésta anulan las cargas positivas de la esfera electrizada quedando el cuerpo envolvente cargado positivamente. *El proceso en su totalidad equivale a una verdadera transferencia de cargas desde la esfera interior hacia el metal conductor que la envuelve.* Se tiene nuevamente que $V_{int} = cte$ y $E_{int} = 0$.

Si ahora sacamos la esfera interior descargada y la volvemos a introducir con una nueva carga, esta produce sus efectos de inducción como se describió en el caso anterior. En cambio el cuerpo externo no produce efectos de inducción sobre la esfera interior porque dentro de la cavidad el campo eléctrico es nulo.

En definitiva, sobre la superficie exterior del cuerpo envolvente aparece un incremento de carga y un aumento de su potencial mayor que el inicial V_{ext} .

Si ponemos en contacto la esfera con la superficie de la cavidad se anulan las cargas interiores y el conductor envolvente ha aumentado definitivamente su carga y su potencial.

Al retirar la esfera, ahora completamente descargada, el cuerpo electrizado sigue con sus nuevos valores eléctricos

$$V_{ext} + \Delta V = V_{int} + \Delta V$$

$$E_{int} = 0$$

De esta experiencia se deduce el importante hecho de que

es posible electrizar con valores muy altos de cargas y potencial a un conductor hueco repitiendo el proceso de tocarlo interiormente con un conductor cargado.

Analicemos ahora como resulta la distribución de potencial en estos procesos. Para simplificar supondremos que los cuerpos tiene forma esférica de radio r y R , tal como se indican en la figura 3-35.

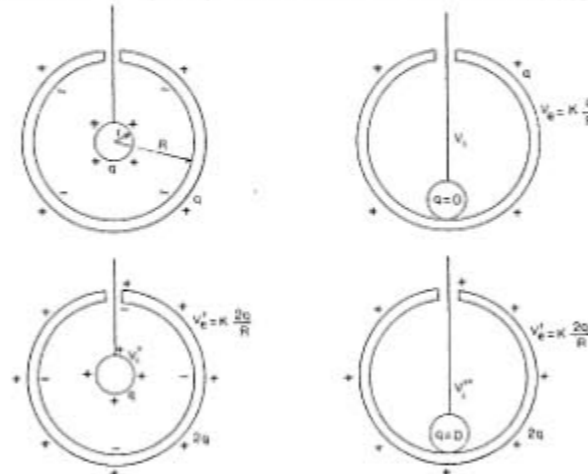


Figura 3-35

El potencial V_{int}' sobre la superficie de la esfera inductora es

$$V_{int}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \frac{2q}{R} - \frac{q}{R} \right)$$

$$V_{int}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \frac{q}{R} \right)$$

y resulta mayor que el potencial en la superficie exterior V_{ext}'

$$V_{ext}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{R}$$

Al tocar por segunda vez la esferita inductora a la esfera exterior se anulan las cargas interiores, quedando por lo tanto que

$$V_{int}'' = V_{ext}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{R}$$

En definitiva si el proceso se repite n veces el conductor hueco adquiere el potencial

$$V_{ext} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{nq}{R} \quad (3-48)$$

Observemos que en el segundo paso del experimento el potencial $V_{int}' > V_{ext}'$ y cuando ambas esferas se ponen en contacto, las cargas fluyen en sentido del potencial decreciente, es decir hacia el exterior.

C-4. Energía mutua de un sistema de conductores

Estudiaremos ahora la energía de formación de un sistema de conductores cargados en equilibrio electrostático. Esto quiere decir que los cuerpos no se mueven y que la carga eléctrica reside en la superficie de cada uno de ellos.

A diferencia del sistema puntual que se formaba geoméricamente y eléctricamente trayendo las cargas desde el infinito, ahora consideremos que el sistema está geoméricamente formado pero sin cargas en el instante inicial y a partir del cual, gradual y simultáneamente cada uno de ellos comienza a recibir incrementos de carga.

Impondremos la condición que la operación comienza y termina en los mismos instantes de tiempo, sea cualquiera el tamaño de la carga final que cada uno de los conductores tendrá.

Esto último permitirá simplificar el cálculo porque así se supone que cada conductor recibe en cada intervalo de tiempo una fracción de su carga total igual para todos ellos. Expresaremos este proceso gradual mediante la variación de un factor numérico x variable desde 0 a 1, que multiplicado por la cantidad final de cada uno de ellos expresa la carga instantánea. Es decir

$$x q_1, x q_2, x q_3, \dots, x q_n$$

serán dichos valores instantáneos suponiendo que sean n los conductores del sistema. El potencial instantáneo también se escribe

$$x V_1, x V_2, x V_3, \dots, x V_n$$

Una variación incremental de la carga, se escribe de la siguiente manera

$$q_1 dx, q_2 dx, q_3 dx, \dots, q_n dx$$

El trabajo elemental que sobre cada uno de los conductores se requiere hacer para provocar este aumento en torno del potencial instantáneo $x V$, vale para el conductor i ,

$$dW_i = x V_i q_i dx$$

$$dW_i = q_i V_i x dx$$

y para todo el sistema de conductores vale

$$dW = \sum_{i=1}^n q_i V_i x dx$$

$$dW = x dx \sum_{i=1}^n q_i V_i$$

El trabajo total que se requerirá para cargar todo el sistema será entonces

$$W = \sum_{i=1}^n q_i V_i \int_0^1 x dx$$

finalmente

$$W = 1/2 \sum_{i=1}^n q_i V_i$$

(3-49)

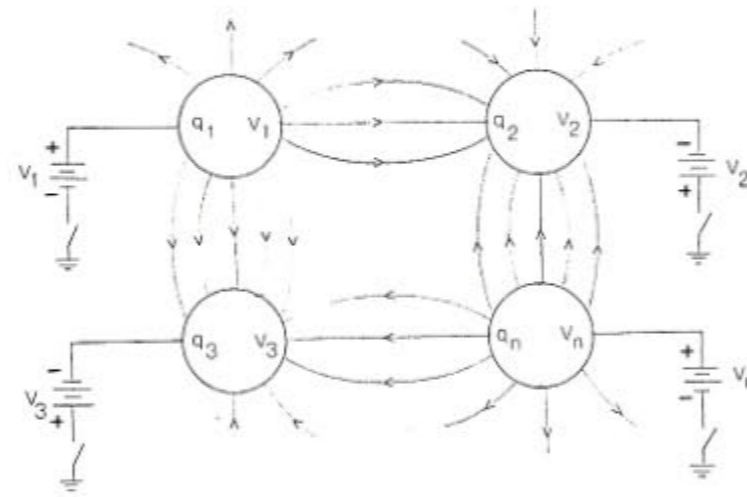


Figura 3-36

La expresión que hemos obtenido, ecuación 3-49, es la misma que para el sistema de cargas puntuales.

Esta coincidencia no debe extrañarnos. En realidad hemos realizado el mismo proceso que en el sistema puntual. Las cargas q dx han venido también teóricamente desde el infinito hasta ubicarse en la superficie de los cuerpos.

Hay sin embargo una diferencia fundamental y es en lo relativo a los potenciales del sistema en cada caso. Para el sistema de cargas puntuales el potencial de cada carga es el resultado del que producen las $n-1$ cargas restantes, en cambio para el sistema de conductores el potencial de cada cuerpo es producido solamente por la fuente usada para cargarlo, con total independencia de la presencia de los otros cuerpos. Entre estos se influyen mutuamente en el tamaño de la carga final, pues la geometría y la inducción electrostática modifican la capacidad de recibir cargas que tiene cada uno.

Consideremos el siguiente ejemplo. Determinemos la energía necesaria para cargar dos cuerpos A y B con una fuente de tensión V , tal como se muestra en la figura 3-37.

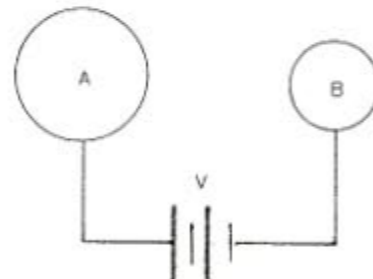


Figura 3-37

Llamemos V_A el potencial del cuerpo A respecto a tierra y V_B el potencial del cuerpo B con respecto a tierra.

La energía necesaria para cargar los dos cuerpos es

$$W = 1/2 (q V_A + q (-V_B))$$

$$W = 1/2 q (V_A - V_B)$$

$$W = 1/2 q V \quad (3-50)$$

La carga que toman los cuerpos y el potencial están relacionados por la *capacidad C* de los cuerpos. Ver *Capítulo 5 CAPACIDAD*.

La capacidad C se define a la relación que existe entre la carga y el potencial, es decir

$$C = \frac{q}{V} \quad (3-51)$$

Por lo tanto la ecuación 3-50 se puede escribir en función de la ecuación 3-51, de las siguientes maneras

$$W = 1/2 q V \quad (3-52)$$

$$W = 1/2 C V^2 \quad (3-53)$$

$$W = 1/2 q^2 / C \quad (3-54)$$

C-5. Energía y densidad de energía

Vimos que la energía mutua de un sistema está expresada en función de las cargas y de los potenciales de los cuerpos que lo forman. Esta energía pertenece pues al agente físico que representa al sistema, es decir a las cargas electrostáticas.

Es posible, no obstante, adoptar un punto de vista distinto aunque equivalente. Si nos aferramos a la idea de que el campo eléctrico es una realidad física, para el cual hemos definido su intensidad y potencial en cada punto, entonces el campo eléctrico es una zona espacial energizada eléctricamente, en donde el trabajo de las fuerzas de dicho campo mide la evolución de su energía. Las cargas tendrían entonces la misión de crear el campo, pero la energía se encontrará en éste.

Vimos en el ejemplo anterior que la energía total del sistema es la mitad del producto de la carga que hay en uno de los cuerpos por la diferencia de potencial entre los mismos. La energía total puede ser subdividida a fin de determinar su distribución en el espacio.

En la figura 3-38 se muestran dos superficies equipotenciales V_1 y V_2 que encierran al cuerpo A.

Si trasladamos toda la carga q del cuerpo A hasta la superficie equipotencial V_1 , el campo entre el cuerpo A y la superficie equipotencial V_1 habrá dejado de existir.

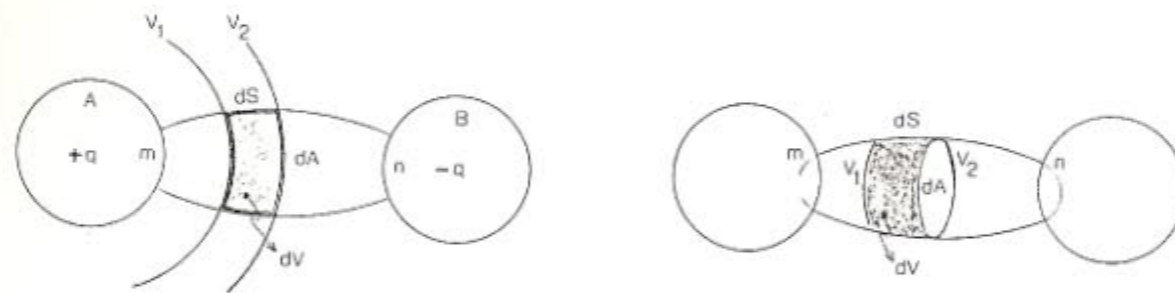


Figura 3-36

Sin embargo el campo entre v_1 y el cuerpo B quedará sin modificarse. La superficie en V_1 seguirá siendo una superficie equipotencial. El mismo flujo anterior seguirá saliendo de ella y con la misma distribución. Pasemos ahora toda la carga de la superficie V_1 a la superficie V_2 . El campo entre V_2 y el cuerpo B queda sin modificarse, pero habremos eliminado el campo entre las dos superficies equipotenciales. Al mismo tiempo la energía del sistema se reduce en

$$\Delta W = 1/2 q (V_1 - V_2)$$

(3-55)

Resulta razonable decir que la energía almacenada en el espacio entre las dos superficies es la expresión 3-55.

Podemos extender esta discusión a todo el espacio y mostrar como la energía se reparte entre las superficies equipotenciales del campo electrostático.

La energía puede estar distribuida entre las líneas de flujo. Como cada fracción de la carga en el cuerpo A corresponde a la misma fracción de la energía total (lo cual es razonable, según ecuación 3-52, $W = 1/2 q V$) y como de allí sale la misma fracción del flujo total podemos decir que esta fracción de la energía está situada en la porción del espacio por donde pasan las correspondientes líneas del tubo de flujo. La energía contenida en el tubo de flujo que pasa del elemento de superficie m sobre el cuerpo A al elemento n de superficie sobre el cuerpo B.

Si el tubo de m a n es un sección diferencial, y dA es su intersección con la superficie equipotencial V_2 y el campo eléctrico es E , por lo tanto el flujo en el tubo es

$$d\phi = \bar{E} \cdot d\bar{A} = \frac{dq}{\epsilon_0}$$

(3-56)

Entonces el flujo total es

$$\phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Por lo tanto podemos decir que la energía contenida en el tubo vale

$$dW = 1/2 dq V$$

reemplazando dq obtenida de la ecuación 3-56, tenemos

$$dW = 1/2 \bar{E} d\bar{A} \epsilon_0 V_{AB}$$

Si cortamos el tubo con dos superficies equipotenciales V_1 y V_2 , la energía en la zona del tubo comprendida entre las dos superficies es según vimos la expresión 3-55. Si en la misma reemplazamos el valor de la carga obtenemos

$$dW = 1/2 \epsilon_0 \bar{E} d\bar{A} (V_1 - V_2)$$

Finalmente si la distancia entre las dos superficies equipotenciales se reduce a dL , es decir que

$$V_1 - V_2 = \bar{E} d\bar{L}$$

entonces la energía en el elemento diferencial de volumen dV es

$$dW = 1/2 (\bar{E} d\bar{A}) (\bar{E} d\bar{L}) \epsilon_0$$

en donde llamamos $dV = d\bar{A} \cdot d\bar{L}$

$$dW = 1/2 \epsilon_0 E^2 dV$$

Para cada unidad de volumen se tendrá

$$w = \frac{dW}{dV}$$

$$w = 1/2 \epsilon_0 E^2 \quad (3-57)$$

Esta última expresión, ecuación 3-57, representa y define la densidad de energía en cualquier punto del campo. Se denomina *densidad de energía (w)*.

Mediante la ecuación 3-57 es posible evaluar la energía total del sistema o del campo, como integración a todo el espacio de existencia del campo eléctrico.

$$W = \int_V w dV = \int_V 1/2 \epsilon_0 E^2 dV \quad (3-58)$$

Expresión completamente general que es válida cualquiera sea la forma del campo eléctrico, sea homogéneo o no.

Como la magnitud intensidad de campo eléctrico E es una magnitud intensiva, válida e individualizada para cada punto del campo, podemos decir que la densidad de energía (w) expresada anteriormente mide el valor de la energía en ese mismo punto, por cuanto dV puede ser tan pequeño como se quiera y en el límite reducirse a un punto y su entorno.

La dependencia cuadrática de la energía con respecto al campo eléctrico E pone en evidencia su carácter escalar y le quita toda direccionalidad.

La evolución de esta energía tiene todas las características de una energía potencial. Por ejemplo, si el sistema, se deja librado a sus propias fuerzas, lo que quiere decir que se deben suprimir todos los vínculos externos que lo mantiene rígido, las fuerzas eléctricas tienden a producir trabajo positivo a expensas de la energía potencial, ésta tiende entonces a ser mínima o a anularse.

C-6. Temas de lectura

C-6-1. El osciloscopio

Uno de los instrumentos científicos ampliamente utilizado es el *osciloscopio*. Los circuitos eléctricos de un osciloscopio son muy complicados, y un modelo sofisticado tiene tantos botones e interruptores de control que se necesita cierto tiempo para familiarizarse con su funcionamiento. Sin embargo, los principios básicos de su componente principal, el *tubo de rayos catódicos*, pueden comprenderse con las ideas desarrolladas hasta el capítulo 3.

En la primera parte del tubo, que es cañón de electrones, una diferencia de potencial constante acelera los electrones emitidos por un filamento caliente, según se muestra en la figura 3-39.

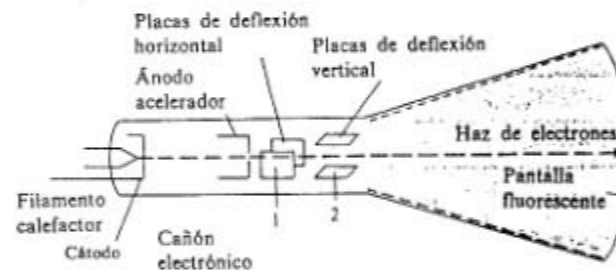


Figura 3-39

Si no existen otras fuerzas actuantes sobre el electrón, éste viaja a lo largo de una línea recta y choca con el centro de la pantalla fluorescente, donde produce una mancha brillante, tal como se observa en la figura 3-40 a). Pueden producirse desviaciones

horizontales mediante la aplicación de campos eléctricos horizontales a través de las placas enumeradas con 1. Supongamos que entre las placas hay una separación d . Si la diferencia de potencial aplicada entre las placas es V_1 , entonces hay un campo eléctrico horizontal uniforme entre ellas cuyo valor está dado por

$$E_1 = \frac{V_1}{d}$$

Este campo acelerará los electrones, que chocan con la pantalla a una cierta distancia horizontal a partir del centro, que es proporcional a V_1 . Si V_1 va aumentando gradualmente, la mancha se va desplazando poco a poco y barre toda la pantalla; cuando V_1 vuelve a su valor original, la mancha regresa a su punto de partida. Si este barrido se repite a una frecuencia suficientemente elevada, la persistencia de la imagen en la pantalla y en el ojo suprime la impresión de movimiento y se ve una línea recta, tal como se muestra en la figura 3-40 b).

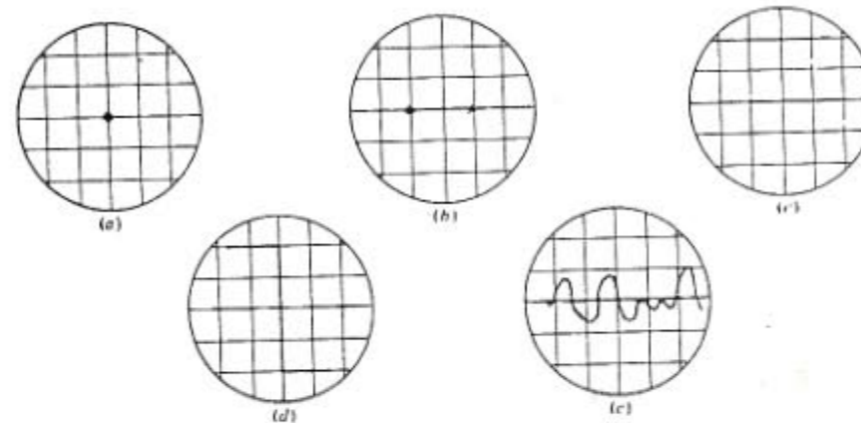


Figura 3-40

De la misma forma, una diferencia de potencial V_2 aplicada a las placas designadas por 2 causará desviaciones verticales. Por ejemplo, un potencial de magnitud V_2 constante desplazará la línea tal como en la figura 3-40 c). En general, una diferencia de potencial desconocida V_2 que varía a una cierta frecuencia f , produce la deflexión vertical. La frecuencia (f) de barrido horizontal se ajusta hasta que es igual a f (o a f dividida por algún número entero), de modo que cada vez que la señal vertical V_2 se repite, el barrido horizontal se halla en la misma posición de su ciclo. Así, el haz choca repetidamente en los mismo puntos de la pantalla y se ve una figura estable, como en las figuras 3-40 d) y e). De esta forma pueden realizarse medidas precisas de la frecuencia y amplitud de un potencial desconocido.

Como casi todos los tipos de información pueden convertirse en diferencias de potencial eléctrico, los osciloscopios se utilizan en laboratorios de cualquier especialidad.

C-6-2. Cable coaxial

El *cable coaxial* es muy empleado en instalaciones de alta frecuencia, está formado por un conductor central de un solo hilo de cobre o de varios arrollados, envuelto por una cubierta de plástico denominado polietileno con un espesor elevado sobre la cual se encuentra un segundo conductor trenzado en forma de malla. Todo el conjunto está recubierto por una segunda cubierta plástica que lo aísla del exterior.

Existe, por último, en el mercado un tipo de cable con una disposición parecida a la del coaxial, pero no debe confundirse con él, por tener unas aplicaciones diferentes. Es el *cable apantallado*.

Se emplea, normalmente, en equipos de sonido y permite conducir corrientes muy débiles sin que sobre las mismas se produzca ninguna alteración por ruidos eléctricos del exterior (véase Capítulo 3, punto C-3), tales como chispas de encendido de automóviles, motores, encendido y apagado de iluminaciones eléctricas, etc.



Figura 3-42