

CAMPO ELECTRICO

- 2-1. Campos Vectoriales y Campos Escalares
  - 2-2. Campo Eléctrico
  - 2-3. Unidades del Campo Eléctrico
- 2-4. Representación gráfica del Campo Eléctrico
- 2-5. Cálculo de Campo Eléctrico para distintas configuraciones cargadas
  - 2-6. Flujo de un Campo Vectorial
  - 2-7. Unidades de Flujo de un Campo Eléctrico
  - 2-8. Flujo a través de una superficie cerrada
    - 2-9. Ley de GAUSS
    - 2-10. Generalización de la Ley de Gauss
    - 2-11. Aplicaciones de la Ley de Gauss
    - 2-12 Conductor aislado
  - 2-13. Energía mutua de un sistema de cargas
- 2-14. Energía mutua de un sistema de tres cargas - Generalización
  - B-1. *Tubo de fuerza del Campo Eléctrico*
  - B-2. *Demostración experimental de las Leyes de Gauss y Coulomb*
  - B-3. *Campo Eléctrico de un dipolo*

Como se observa, para puntos muy distantes, el anillo se comporta como un carga puntual.

### 2-6. Flujo de un Campo Vectorial

Sea  $V$  un campo de vectores y representemos una porción del mismo mediante líneas de fuerza o flujo. Consideremos una superficie elemental  $dS$  que contenga al punto  $P$  y que además tenga una orientación arbitraria.

El valor de la superficie está dada por  $dS$  y su orientación está definida por el vector normal a la superficie  $n$  con el sentido dado por la regla del tirabuzón al recorrer el contorno de la superficie en un sentido fijado convencionalmente (antihorario en este caso).

$$\overline{dS} = dS \cdot \overline{n} \quad (2-12)$$

Con esta convención se dice que  $dS$  es un vector cuyo módulo es el valor de la superficie y cuya dirección y sentido están determinados por su normal positiva  $n$ .

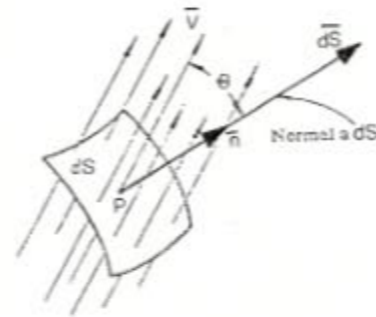


Figura 2-13

Se define como flujo elemental del vector  $V$  (o campo vectorial  $V$ ) a través de la superficie elemental  $dS$  al producto escalar

$$d\phi = \overline{V} \cdot \overline{dS} = V \cdot dS \cdot \cos\theta \quad (2-13)$$

Como vemos en la ecuación 2-13, el flujo así definido es una magnitud escalar.

Según observamos las figuras 2-14 a), b), c) y d) y aplicamos la ecuación 2-13, tendremos que

el flujo será negativo cuando	$\theta > \pi/2$
el flujo será cero cuando	$\theta = \pi/2$
el flujo será positivo cuando	$\theta < \pi/2$
el flujo será máximo cuando	$\theta = 0$

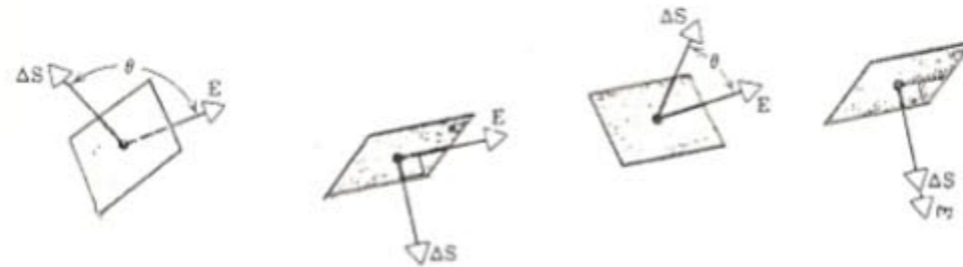


Figura 2-14

El flujo obtenido es un flujo elemental a través de una superficie elemental. El flujo a través de una superficie finita se obtiene por integración teniendo en cuenta que en general el campo vectorial varía de punto a punto sobre la superficie y que además la orientación de la superficie también varía de punto a punto.

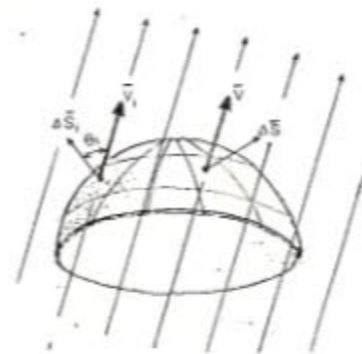


Figura 2-15

de la figura 2-15 se observa el flujo total a través de la superficie S es

$$\phi = \sum \Delta\phi_i = \sum \bar{V}_i \cdot \Delta\bar{S}_i \quad (2-14)$$

$$\phi = \int_S \bar{V} \cdot d\bar{S} \quad (2-15)$$

### 2-7. Unidades de Flujo de un Campo Eléctrico

En el sistema internacional SI el flujo se mide por las siguientes unidades

$$|\phi| = |E \cdot S| = \frac{\text{Newton}}{\text{coul}} \text{ metro}^2 = \frac{\text{Volt}}{\text{metro}} \text{ metro}^2 = \text{Volt} \cdot \text{metro}$$

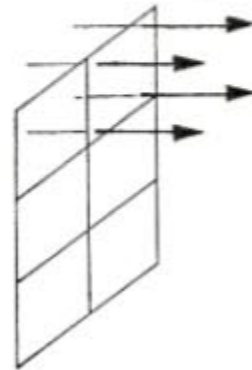
Se acostumbra a definir al campo electrostático en un punto como el número de líneas de fuerza por  $m^2$  igual al valor del campo.

Por ejemplo un valor de campo de 4 Newton/coul = 4 líneas/metro<sup>2</sup>

$$E = \frac{\text{número de líneas}}{\text{metro}^2} \quad (2-16)$$

$$\phi = \frac{\text{número de líneas}}{\text{metro}^2} \cdot \text{metro}^2 = \text{número total de líneas a través de S} \quad (2-17)$$

El flujo a través de una superficie de 6  $m^2$  será igual a 24 líneas



$$E = 4 \frac{\text{Newton}}{\text{metro}^2} = 4 \frac{\text{Líneas}}{\text{metro}^2}$$

$$\phi = 4 \frac{\text{Líneas}}{\text{metro}^2} \cdot 6 \text{ metro}^2 = 24 \text{ Líneas}$$

### 2-8. Flujo a través de una superficie cerrada

Cuando la superficie a considerar es una superficie cerrada delimitando un volumen  $V$ , se toma como sentido positivo del vector  $\Delta S$  el sentido de la normal saliente. Si la superficie  $S$  está inmersa en un campo vectorial habrá líneas de fuerza que entran al volumen delimitado por  $S$  y otras que salen.

*Al flujo entrante se le considera negativo*

*Al flujo saliente se lo considera positivo*

*El flujo neto a través de la superficie cerrada será igual al flujo saliente menos flujo entrante.*

*El flujo neto puede ser positivo, negativo o nulo.*

El valor del flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada es una característica del campo vectorial considerado.

$$\phi = \sum \Delta \phi_i$$

$$\phi = \sum v_i \cdot \Delta S_i$$

$$\phi = \oint_S \bar{v} \cdot d\bar{S} \quad (2-18)$$

en donde

$\oint_S$  = significa integral extendida a toda la superficie cerrada S

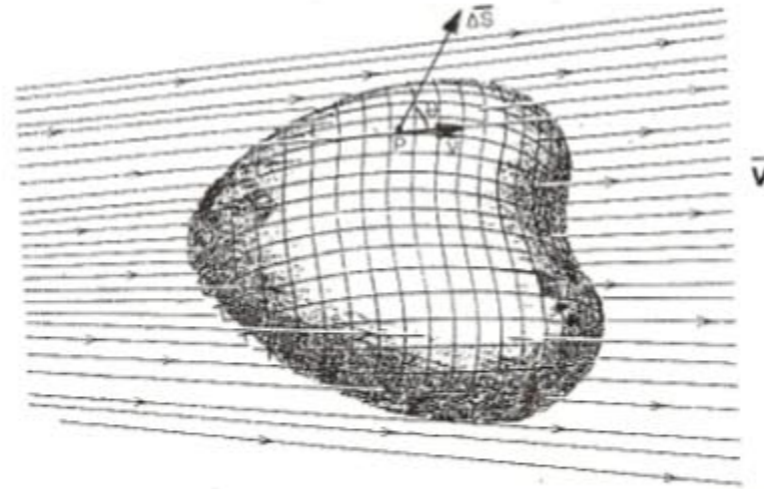


Figura 2-16

### 2-9. Ley de GAUSS

Consideremos el campo eléctrico creado por una carga puntual  $q$ . Tomemos una superficie cerrada  $S$  que encierra a la carga. Supongamos además que estamos realizando nuestro análisis en el vacío.

Para la deducción matemática de la *Ley de GAUSS* utilizaremos el concepto de *ángulo sólido*.

Consideremos un elemento infinitesimal de área  $dA$  sobre una superficie esférica. El ángulo sólido  $d\Omega$  subtendido en el centro de la esfera se define como

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} \quad (2-19)$$

siendo  $r$  el radio de la esfera. Puesto que tanto  $dA$  como  $r^2$  tienen dimensiones de longitud al cuadrado, el ángulo sólido es adimensional. La unidad de ángulo sólido es el *estereorradián*. Puesto que el área total de una esfera es  $4\pi r^2$ , el ángulo sólido total subtendido por una esfera es

$$\frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \text{ estereorradianes}$$

De la figura 2-17 a) y b) consideremos el ángulo sólido elemental  $d\Omega$  y calculemos el flujo relacionado con él.

$$d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS \cos\theta$$

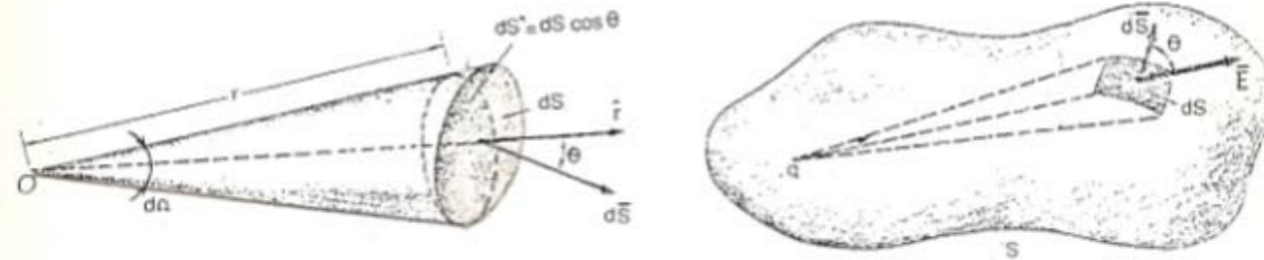


Figura 2-17

el elemento  $dS$  cuya normal  $n$  no es paralela a la línea radial que va de  $O$  hasta el centro del elemento infinitesimal, la proyección de dicha área sobre el vector  $r$ , la llamaremos  $dS'$ , por lo tanto

$$dS' = dS \cos\theta$$

$$d\phi = E dS'$$

aplicando el concepto de ángulo sólido (ecuación 2-19) tenemos

$$dS' = r^2 \cdot d\Omega$$

$$d\phi = E r^2 d\Omega$$

El campo eléctrico producido por una carga puntual a una distancia  $r$ , en el punto  $P$ , vale

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

reemplazando

$$d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot r^2 d\Omega \quad (2-20)$$

Para obtener el flujo  $\phi$  a través de toda la superficie integraremos la expresión 2-20, tomando como límites de integración cero y el ángulo sólido que abarque toda la superficie, el cual vale  $4\pi$

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2-21)$$

Esta última expresión (2-21) es la *Ley de GAUSS*. Entonces de acuerdo a esta ley

*El valor del flujo de un campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual al valor de la carga encerrada dividida por el coeficiente de permitividad del vacío, sin importar la posición de la carga y sin importar la forma y tamaño de la superficie.*

Podemos generalizar la expresión 2-21 de la siguiente manera

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i \quad (2-22)$$

Aplicando la expresión 2-22 al ejemplo mostrado en la figura 2-18 obtenemos

$$\phi = \frac{1}{\epsilon_0} (q_1 - q_2 - q_3 + q_4)$$

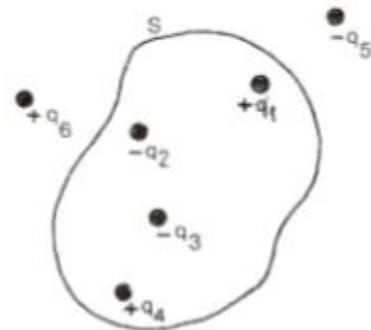


Figura 2-18

notese que las cargas que están fuera de la superficie cerrada no intervienen en el cálculo.

En la figura 2-19 se representan dos cargas iguales y opuestas. En la misma se han representado distintas superficies cerradas hipotéticas con líneas interrumpidas.

De la observación de la figura 2-19 se deducen las siguientes expresiones:

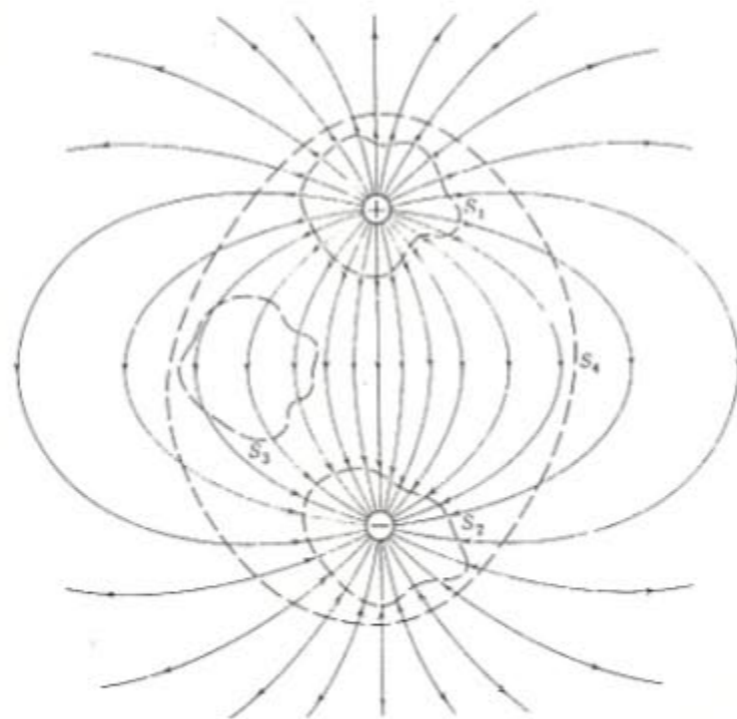


Figura 2-19

El flujo a través de una superficie cerrada es positivo cuando la carga neta encerrada es positiva

$$\phi_{e1} = + q/\epsilon_0$$

El flujo a través de una superficie cerrada es negativo cuando la carga neta encerrada es negativa

$$\phi_{e1} = - q/\epsilon_0$$

El flujo a través de una superficie cerrada es cero cuando la carga neta encerrada es cero o cuando no existe carga encerrada

$$\phi_{e1} = 0/\epsilon_0 = 0$$

$$\phi_{e1} = (-q + q)/\epsilon_0 = 0$$

Puede suceder que las cargas encerradas por la superficie no sean puntuales, sino que sean cargas distribuidas según una cierta densidad de carga, estas pueden ser de tipo

$$\text{lineal} \quad \delta = \frac{\text{Carga}}{\text{Longitud}} \quad [\text{coul/metro}] \quad (2-23)$$

$$\text{superficial } \sigma = \frac{\text{Carga}}{\text{Area}} \quad [\text{coul/metro}^2] \quad (2-24)$$

$$\text{volumétrica } \tau = \frac{\text{Carga}}{\text{Volumen}} \quad [\text{coul/metro}^3] \quad (2-25)$$

Por ejemplo, para el caso del cuerpo de la figura 2-20, el cual posee una carga distribuida del tipo volumétrico  $\tau$  [coul/m<sup>3</sup>] el cálculo del flujo aplicando la ecuación 2-21, sería

$$\phi = \oint_S \bar{E} \cdot d\bar{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \tau \, dV$$

Siendo  $V$  el volumen encerrado por la superficie  $S$ .



Figura 2-20

### 2-10. Generalización de la Ley de GAUSS

Escribamos la ecuación de la Ley de Gauss de acuerdo a la expresión 2-21, de la siguiente manera

$$\epsilon_0 \oint_S \bar{E}_0 \cdot d\bar{S} = q \quad (2-26)$$

en donde  $E_0$  es el campo eléctrico en el vacío.

Esta expresión 2-26 es válida cuando la carga  $q$  y la superficie cerrada  $S$  están en el vacío.

Si la carga  $q$  está inmersa en un dieléctrico como el aceite, por ejemplo, debemos realizar la siguiente corrección

$$K_e \epsilon_0 \oint_S \bar{E} \cdot d\bar{S} = q \quad (2-27)$$

en la cual  $K_e$  se denomina *coeficiente dieléctrico del material*, y  $E$  es el campo eléctrico en el medio dieléctrico. El valor de  $K_e$  se determina mediante la siguiente relación

$$K_e = \frac{E_o}{E} = \frac{\text{Campo eléctrico en el vacío}}{\text{Campo eléctrico en el dieléctrico}} \quad (2-28)$$

Si la superficie gaussiana abarca materiales dieléctricos de distinta naturaleza como aceite y aire (es decir que poseen distintos valores de  $K_e$ ), este debe ser introducido dentro de la integral ya que  $K_e$  variará durante el proceso de integración. Por lo tanto la ecuación 2-27 se transforma en

$$\oint_S K_e \epsilon_o \bar{E} \cdot d\bar{S} = q \quad (2-29)$$

Al producto del coeficiente dieléctrico ( $K_e$ ) por la constante de permitividad ( $\epsilon_o$ ) se lo denomina *capacidad específica de inducción* del material ( $\epsilon$ ), es decir

$$\epsilon = K_e \cdot \epsilon_o \quad (2-30)$$

entonces reemplazando en la ecuación 2-29, obtenemos

$$\oint_S \epsilon \bar{E} \cdot d\bar{S} = q \quad (2-31)$$

El producto del campo eléctrico dentro de un dieléctrico ( $E$ ) por la capacidad específica de inducción se llama vector desplazamiento ( $D$ ), por lo tanto

$$\bar{D} = \epsilon \cdot \bar{E} \quad (2-32)$$

Finalmente, la ecuación 2-21, de la Ley de Gauss se puede expresar como

$$\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{S} = q \quad (2-33)$$

conocida como *Ley de Gauss generalizada*. Al vector desplazamiento ( $D$ ) también se lo llama *densidad de flujo eléctrico*.

En la siguiente tabla 2-1 se dan los valores correspondientes a algunos materiales del coeficiente dieléctrico ( $K_e$ ) y de la capacidad específica de inducción ( $\epsilon$ )

Sustancia	coeficiente dieléctrico $K_e$ [adimensional]	capacidad específica de inducción $\epsilon$ [coul <sup>2</sup> /new-m <sup>2</sup> ]
Vacío	1	$8.85 \times 10^{-12}$
Ebonita	2,5 - 35	$22-300 \times 10^{-12}$
Madera	2,5 - 8	$22-70 \times 10^{-12}$
Mica	3 - 6	$27-54 \times 10^{-12}$
Vidrio	5 - 10	$45-90 \times 10^{-12}$
Agua	81	$717 \times 10^{-12}$
Alcohol etílico	28,4	$252 \times 10^{-12}$
Aceite	2,24	$0,19 \times 10^{-12}$
Glicerina	56	$500 \times 10^{-12}$
Aire	1,00059	$8,85 \times 10^{-12}$
Papel	3,7	$32,7 \times 10^{-12}$
Metales	$\infty$	$\infty$

Tabla 2-1

### 2-11. Aplicación de la Ley de GAUSS

La ley de Gauss es de gran utilidad para el cálculo de campo eléctricos donde existen ciertas condiciones de simetría.

#### 2-11-1. Campo eléctrico creado por una carga puntual $q$

Supongamos tener una carga puntual  $q$  y deseamos calcular el valor del campo eléctrico que produce en un punto  $P$  situado a una distancia  $r$  de la misma. Consideremos la figura 2-20.

Tomamos como superficie gaussiana convenientemente a una superficie esférica de radio  $r$  con centro en la carga  $q$ .

El campo eléctrico en cada punto de la superficie esférica es de valor constante y de dirección radial, por razones de simetría. Además en cada punto de la superficie el vector  $dS$  es de dirección radial.



Figura 2-21

$$d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS \cos\theta = E dS$$

teniendo en cuenta que  $\theta = 0$  entonces  $\cos\theta = 1$ , entonces

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \oint_S dS = E 4\pi r^2$$

$$\phi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{de la ecuación 2-21}$$

por lo tanto

$$\frac{q}{\epsilon_0} = E 4\pi r^2$$

despejando el campo eléctrico E, resulta

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

Como se observa la última expresión, se ha deducido la ley de Coulomb a partir de la Ley de Gauss.

#### 2-11-2. Campo eléctrico creado por una distribución de carga lineal uniforme de longitud infinita

Consideremos un alambre con una carga lineal  $\delta = q/L$  [coul/metro] constante.

Adoptamos una superficie gaussiana conveniente a una superficie cilíndrica coaxial con la línea de carga como se observa en la figura 2-22.

El campo eléctrico en todos los puntos de la superficie lateral del cilindro es constante y de dirección radial, por razones de simetría.

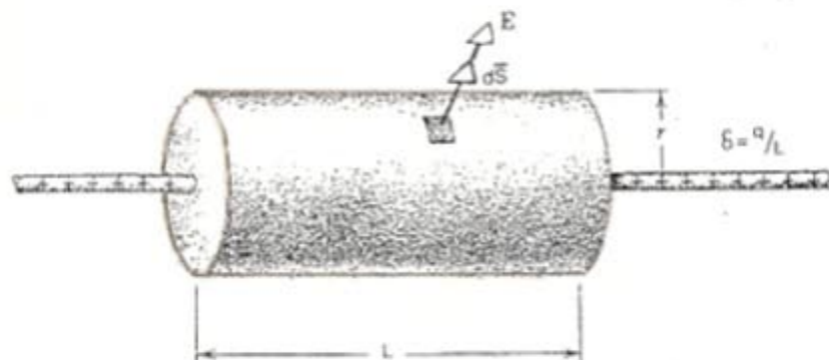


Figura 2-22

$$d\phi = \bar{E} \cdot d\bar{S}$$

$$\phi = \oint_S \bar{E} \cdot d\bar{S} = \int_{\text{lateral}} \bar{E} \cdot d\bar{S} + \int_{\text{tapas}} \bar{E} \cdot d\bar{S}$$

En las tapas de la superficie gaussiana cilíndrica  $E$  y  $dS$  son perpendiculares por lo tanto

$$\phi_1 = \int_{\text{Tapas}} \bar{E} \cdot d\bar{S} = 0$$

entonces

$$\phi = \int_{\text{lateral}} \bar{E} \cdot d\bar{S} = \int_{\text{lateral}} E \cdot dS \cdot \cos\theta = \int_{\text{lateral}} E \cdot dS = E \int_{\text{lateral}} dS$$

$$\phi = E 2\pi r L = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\delta L}{\epsilon_0}$$

despejando el campo eléctrico  $E$ , obtenemos

$$E = \frac{\delta r}{2\pi r \epsilon_0}$$

observamos que la longitud  $L$  del cilindro se simplifica lo cual era previsible por ser esta medida un valor completamente arbitrario.

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\delta}{r} \quad (2-34)$$

El campo eléctrico creado por una distribución de carga lineal uniforme de longitud finita no se puede calcular por la Ley de Gauss ya que el campo eléctrico no tendría de esta manera *simetría*. Es decir, por un lado el campo eléctrico no es perpendicular a la superficie cilíndrica que habíamos adoptado salvo en el punto medio de la línea de carga y además no depende únicamente de  $r$ , sino que también de la distancia al punto medio. Para poder resolver este problema deberíamos aplicar la Ley de Coulomb.

### 2-11-3. Campo eléctrico creado por un cilindro conductor de longitud infinita con carga distribuida.

Consideremos un cilindro conductor con una carga superficial cuyo valor es  $\sigma = dq/dS$  [coul/metro<sup>2</sup>] constante.

Adoptamos una superficie gaussiana conveniente a una superficie cilíndrica coaxial con la línea de carga como se observa en la figura 2-23.

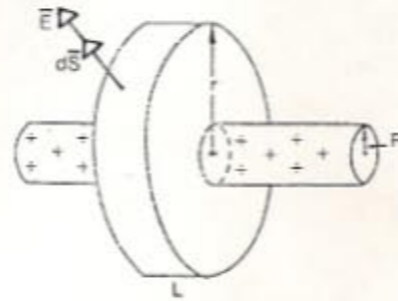


Figura 2-23

La densidad de carga superficial  $\sigma$  se puede expresar de la siguiente manera

$$\sigma = \frac{q}{2\pi R L}$$

entonces

$$q = \sigma 2\pi R L$$

$$d\phi = \bar{E} \cdot d\bar{S}$$

$$\phi = \oint_S \bar{E} \cdot d\bar{S} = \int_{\text{slateral}} \bar{E} \cdot d\bar{S} + \int_{\text{stapas}} \bar{E} \cdot d\bar{S}$$

En las tapas de la superficie gaussiana cilíndrica  $E$  y  $dS$  son perpendiculares por lo tanto

$$\oint_{S_{\text{tapas}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

entonces

$$\oint_{S_{\text{lateral}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{\text{lateral}}} E \cdot dS \cdot \cos 0^\circ = \int_{S_{\text{lateral}}} E \cdot dS = E \int_{S_{\text{lateral}}} dS$$

$$\oint = E \cdot 2\pi r L = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{2\sigma\pi R \cdot L}{\epsilon_0}$$

despejando el campo eléctrico E, obtenemos

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\sigma R}{r} \quad (2-35)$$

en la ecuación 2-35 queda expresado el campo eléctrico E en función de la densidad de carga superficial  $\sigma$ , el radio del conductor R y la distancia del eje del conductor al punto en donde se desea calcular el valor del campo eléctrico.

Podemos expresar también el campo eléctrico en función de la densidad lineal de carga  $\delta$  [coul/metro], es decir

$$q = \sigma 2\pi R L$$

$$\delta = \frac{q}{L} = \frac{\sigma 2\pi R L}{L}$$

por lo tanto la densidad de carga superficial en función de la densidad de carga lineal es

$$\sigma = \frac{\delta}{2\pi R}$$

reemplazando el valor de  $\sigma$  en la ecuación 2-35, obtenemos el valor del campo eléctrico en función de la densidad de carga lineal  $\delta$

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\delta}{r}$$

si se observa la última expresión se ve que el cilindro cargado actúa como si la carga estuviera concentrada en el eje del mismo. Ver ecuación 2-34.

En resumen, podemos escribir que el valor del campo eléctrico es:  
 - para puntos interiores del conductor cilíndrico

$$E = 0$$

- para puntos en la superficie del conductor cilíndrico

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\delta}{R}$$

- para puntos exteriores al conductor cilíndrico

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{R \sigma}{r} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\delta}{r}$$

#### 2-11-4. Campo eléctrico creado por una esfera conductora cargada

Consideremos una esfera conductora cargada con una carga superficial cuyo valor es  $\sigma = dq/dS$  [coul/metro<sup>2</sup>] constante.

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2} \text{ [coul/metro}^2\text{]}$$

Adoptamos una superficie gaussiana conveniente a una superficie esférica tal como se observa en la figura 2-24.

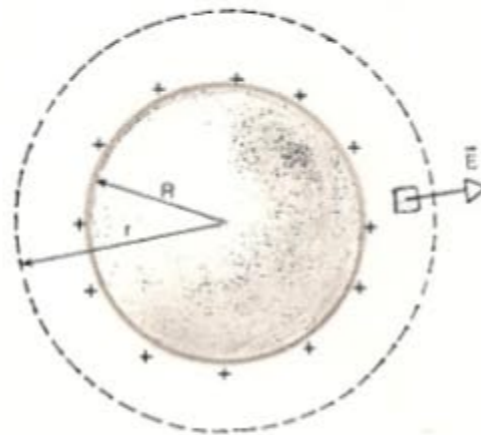


Figura 2-24

Por razones de simetría el campo eléctrico sobre los puntos de la superficie gaussiana esférica es constante y de dirección radial

$$d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS \cos\theta = E dS$$

teniendo en cuenta que  $\theta = 0$  entonces  $\cos\theta = 1$ , entonces

$$\phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \int_S dS = E 4\pi r^2$$

$$\phi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{de la ecuación 2-21}$$

por lo tanto

$$\frac{q}{\epsilon_0} = E 4\pi r^2$$

despejando el campo eléctrico E, resulta

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

Como se observa la esfera conductora cargada actúa como si toda la carga estuviera concentrada en el centro.

Si reemplazamos el valor de la carga q en función de la densidad de carga superficial  $\sigma$ , tendremos

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma 4\pi R^2}{r^2}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \frac{R^2}{r^2} \quad (2-36)$$

En resumen, podemos escribir que el valor del campo eléctrico es:

- para puntos interiores de la esfera conductora

$$E = 0$$

- para puntos exteriores a la esfera conductora

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \frac{R^2}{r^2}$$

- para puntos sobre la superficie de la esfera conductora

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

## 2-11-5. Campo eléctrico creado por una placa dieléctrica infinita con carga superficial

Supongamos tener una placa dieléctrica sobre la cual se han colocado por algún medio, por ejemplo frotamiento, cargas sobre una de sus caras. Como la superficie es dieléctrica el campo se evidencia a ambos lados de la placa. Por razones de simetría el campo eléctrico en un punto es perpendicular a la superficie y además es constante para puntos que están a la misma distancia del plano. Para puntos simétricamente dispuestos con respecto a la placa el campo debe tener el mismo valor pero distinto sentido, tal como lo muestra la figura 2-25 a) y b).

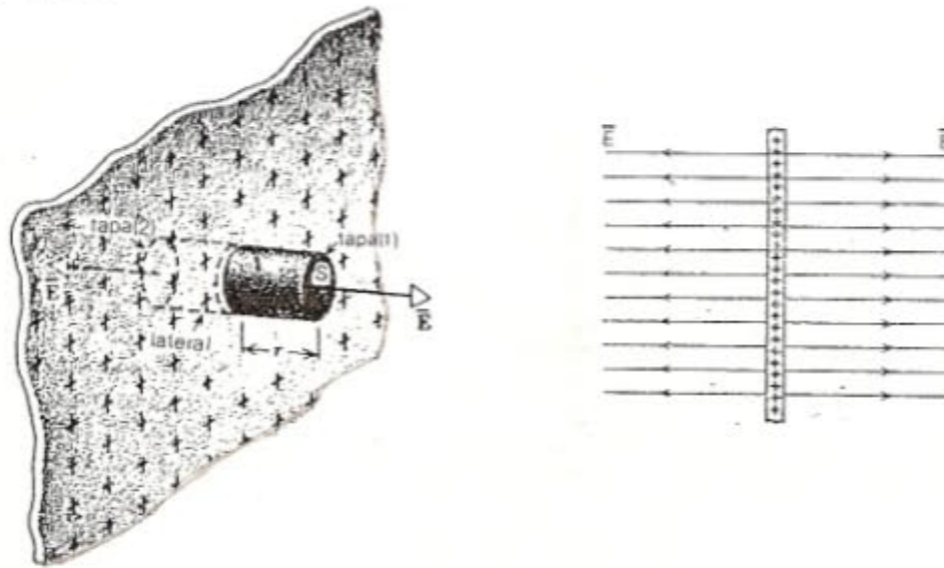


Figura 2-25

Adoptamos como superficie gaussiana un pequeño cilindro como el indicado en la figura. Vemos que el flujo creado por la carga  $dq$  sale totalmente por las tapas del cilindro siendo el flujo a través de la superficie lateral cero, debido a que el ángulo  $\theta$  entre la dirección del campo eléctrico  $E$  y el vector representativo del área  $dS$  es de 90 grados. Entonces

$$d\phi = E \cdot dS$$

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{\text{lateral}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_{\text{tapa(1)}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_{\text{tapa(2)}}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

El flujo en las superficie lateral como dijimos anteriormente es cero, a por lo tanto

$$\phi_1 = \int_{S_{\text{lateral}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

entonces

$$\phi = \int_{Stapa(1)} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{Stapa(2)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{Stapa(1)} E dS \cos 0^\circ + \int_{Stapa(2)} E dS \cos 0^\circ$$

$$\phi = 2 \int_{Stapa(1 \text{ y } 2)} E \cdot dS = 2 \cdot E \int_{Stapa(1 \text{ y } 2)} dS = 2 \cdot E \cdot A$$

$$\phi = 2 \cdot E \cdot A = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

despejando el campo eléctrico E, obtenemos

$$E = \frac{1}{2\epsilon_0} \cdot \sigma \quad (2-37)$$

Como vemos en la ecuación 2-37 el campo eléctrico es independiente de la distancia del punto al plano, teniendo el mismo valor sobre la superficie o en cualquier otro punto del espacio.

Esto se entiende también porque la distribución de líneas de fuerzas que habíamos dibujado en forma intuitiva tiene igual densidad en cualquier punto del espacio.

Los resultados obtenidos pueden ser aplicados a una placa de dimensiones finitas para puntos próximos a la superficie.

#### 2-11-6. Campo eléctrico creado por una superficie conductora infinita cargada superficialmente.

La carga está distribuida sobre una de las caras de la placa conductora creando un campo eléctrico fuera del conductor perpendicular a la superficie del mismo. Como no puede haber campo eléctrico dentro del conductor, véase punto 2-12, aquel se manifiesta únicamente a un lado de la superficie, tal como se muestra en la figura 2-26.

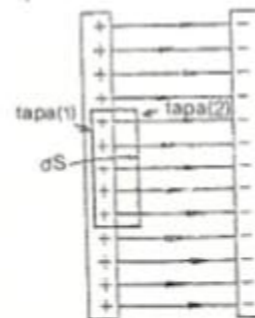


Figura 2-26

$$d\phi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{Slateral}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{Stapa(1)}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{Stapa(2)}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

Observando al figura 2-26, tenemos que el flujo en la superficie lateral es cero debido a que la dirección del campo eléctrico  $\mathbf{E}$  con la dirección del vector representativo del área  $d\mathbf{S}$  son perpendiculares. Además por lo expresado anteriormente solamente existe el campo eléctrico a un solo lado de la superficie, entonces

$$\phi_1 = \int_{\text{Slateral}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \text{por ser } \mathbf{E} \text{ y } d\mathbf{S} \text{ perpendiculares}$$

$$\phi_2 = \int_{\text{Stapa(1)}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \text{por ser } \mathbf{E} = 0$$

por lo tanto

$$\phi = \int_{\text{Stapa(2)}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{Stapa(2)}} E dS \cos 0^\circ$$

$$\phi = \int_{\text{Stapa(2)}} E \cdot d\mathbf{S} = E \int_{\text{Stapa(2)}} dS = E \cdot A$$

$$\phi = E \cdot A = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

despejando el campo eléctrico  $E$ , obtenemos

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \sigma \quad (2-38)$$

## 2-12. Conductor aislado

Si en un conductor aislado se coloca un exceso de cargas positivas o negativas están tienden a repelerse y debido a que el conductor permite el desplazamiento de cargas estas se separan lo máximo posible ubicándose en la superficie del mismo.

Observandose al conductor aislado mostrado en la figura 2-27, y tomando una superficie gaussiana interna al material pero tan cerca como se pueda de la superficie, al no haber cargas dentro de la superficie gaussiana se concluye que el campo eléctrico  $E$  dentro del conductor es cero.

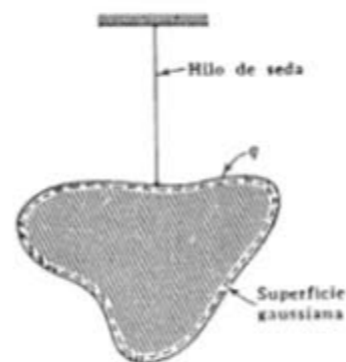


Figura 2-27

Si no fuera así, el exceso de cargas produciría un campo eléctrico dentro del conductor el cual generaría corrientes internas producidas por el desplazamiento de cargas libres (electrones). Estas corrientes internas redistribuyen el exceso de carga hasta anular el campo interno, lo cual se logrará cuando el exceso de carga se situó sobre la superficie del conductor según deducimos de la Ley de Gauss.

El campo eléctrico sobre la superficie del conductor debe ser perpendicular al mismo ya que de no ser así se producirían corrientes superficiales que no coinciden con las condiciones electrostáticas.

Considerando la 2-28, adoptamos como superficie gaussiana un pequeño cilindro de base  $dS$  dentro de un conductor cargado.

Aplicando la Ley de Gauss, teniendo en cuenta que el flujo del campo eléctrico sobre la superficie lateral de la superficie gaussiana adoptada es cero, por lo tanto resulta

$$d\phi = \frac{dq}{\epsilon_0} = \bar{E} \cdot d\bar{S} = E \cdot dS$$

$$E = \frac{dq}{\epsilon_0 dS} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



Figura 2-28

Esta última expresión es el valor del campo eléctrico sobre la superficie del conductor y puntos vecinos al mismo, de dirección perpendicular a la superficie. Nótese que es la misma expresión hallada para el caso de campo eléctrico para placas metálicas, ecuación 2-38.

## 2-13. Energía mutua de un sistema de cargas

Supongamos tener un par de cargas positivas ubicadas a una distancia finita. Para formar este sistema de cargas (es decir ubicar las cargas a una distancia finita entre ellas) es necesario realizar un trabajo, el cual queda almacenado en el sistema en forma de *energía potencial eléctrica*.

Supongamos que en la figura 2-29  $q_1$  es fija y coincidente con el origen de un sistema de coordenadas polares y que  $q_2$  es transportada desde el infinito por una fuerza externa  $F_{ext}$  (mecánica) que constantemente equilibra a las fuerzas coulombianas entre las cargas. La distancia entre las cargas la medimos mediante el radiovector  $r$ , siendo  $r_0$  la distancia final del sistema formado. La fuerza  $F$  es el valor instantáneo de las fuerzas coulombianas en la posición  $r$ .

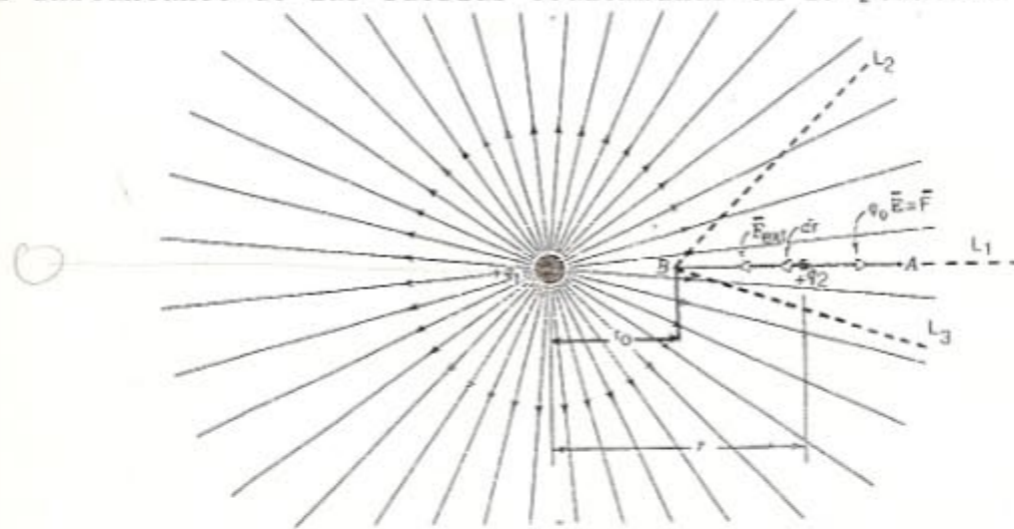


Figura 2-29

El trabajo realizado por la fuerza externa  $F_{ext}$  es positivo, mientras que el trabajo realizado por la fuerza coulombiana es negativo (que es la reacción del proceso). En valor absoluto ambos trabajos son iguales por que suponemos que el movimiento de  $q_2$  es uniforme, y no acelerado, es decir

$$|F_{ext}| = |F|$$

Por lo tanto el trabajo de la fuerza externa  $F_{ext}$  resulta

$$dW_1 = \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{r} = F_{ext} dr \cos 0^\circ = F_{ext} dr$$

y el trabajo que realiza la fuerza coulombiana  $F$  es

$$dW_2 = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F dr \cos 180^\circ = -F dr$$

reemplazando en esta última expresión el valor de  $F$  por la expresión de la Ley de Coulomb (ecuación 1-1) obtenemos

$$dW = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot dr$$

El trabajo total que resulta para traer la carga  $q_2$  desde el infinito hasta una distancia de  $q_1$  igual a  $r_0$  es

$$W = - \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{r_0} \frac{dr}{r^2}$$

$$W = - \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left[ - \frac{1}{r} \right]_{\infty}^{r_0}$$

$$W = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_0} \quad \rightarrow F_{em} \quad (2-39)$$

Este valor mide la energía desarrollada por la acción externa para formar el sistema de cargas  $q_1$   $q_2$  separadas a la distancia  $r_0$  valor que es independiente de la trayectoria seguida por la fuerza aplicada y solo depende de la posición final  $r_0$  y del valor de las cargas eléctricas. Igual valor hubiéramos obtenido si el camino hubiese sido  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  u otro cualquiera.

Este trabajo ha creado energía potencial en el sistema que llamaremos *energía potencial eléctrica* que a su vez dará lugar a un trabajo positivo de la fuerza coulombiana cuando se permita la destrucción del sistema, es decir cuando la carga  $q_2$  sea llevada al infinito por dicha fuerza.

El trabajo  $W$  es la *energía mutua* de las dos cargas, pertenece al sistema y no se puede decir que está formada por el aporte individual de las cargas, se crea y destruye simultáneamente con el sistema.

#### 2-14. Energía mutua de un sistema de tres cargas - Generalización

Supongamos que el sistema se ha formado manteniendo fija la carga  $q_1$  y desplazando las otras dos desde el infinito separadamente.

El trabajo realizado por las fuerzas externas resulta

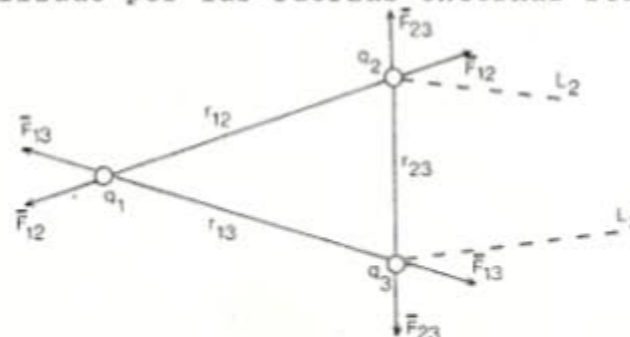


Figura 2-30

$$W_{123} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} \right) \quad (2-40)$$

Generalizando la expresión 2-40 obtenemos

$$W_{123} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad \text{para } i \neq j \quad (2-41)$$

Generalizando esta última ecuación (2-41) resulta para un sistema de N cargas

$$W_N = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad \text{para } i \neq j \quad (2-41)$$

B-1. Tubo de fuerza del Campo Eléctrico

Si en un campo eléctrico trazamos una línea cerrada  $L$  queda determinado un *tubo de fuerza*, cuya pared la forman las líneas de las que  $L$  es generatriz, tal como se observa en la figura 2-31 .



Figura 2-31

El tubo de fuerza tiene las siguientes características:

a) El tubo comienza en las cargas positivas y termina en las cargas negativas. Figura 2-32 a) y b).

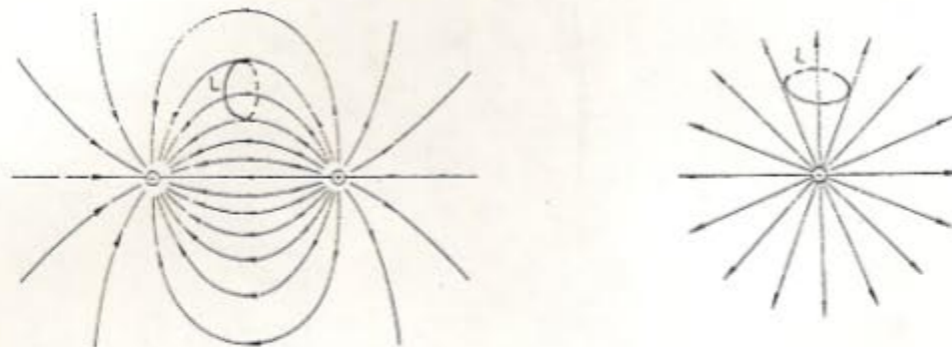


Figura 2-32

b) Como por cada punto solo pasa una línea de fuerza estas no entran ni salen ni atraviesan el tubo.

c) El número de líneas dentro de un tubo es constante.

Por lo tanto podemos afirmar que en un tubo de fuerza el flujo a través de superficies abiertas limitadas por las generatrices del tubo es constante. Se dice entonces que el campo eléctrico tiene estructura tubular.

Aplicando la Ley de Gauss al volumen delimitado por las superficies  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_{lateral}$  de la figura 2-33, tenemos

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_L = 0 \text{ por no haber cargas encerradas}$$

$\phi_L = 0$  porque el vector  $n$  y  $E$  son perpendiculares en la pared lateral del tubo

$\phi = \phi_1 + \phi_2 = 0$  entonces

$\phi_1 = \phi_2$



Figura 2-33

#### B-2. Demostración experimental de las Leyes de Gauss y Coulomb

La demostración se basa en la realización de una sencilla prueba. La misma consiste en cargar una bola metálica y sosteniéndola con un hilo de seda se procede a descenderla hasta el fondo de un recipiente metálico tal como se observa en la figura 2-34.

Se toca con la bola el interior del recipiente y cuando se saca la bola del recipiente, esta habrá perdido toda su carga.

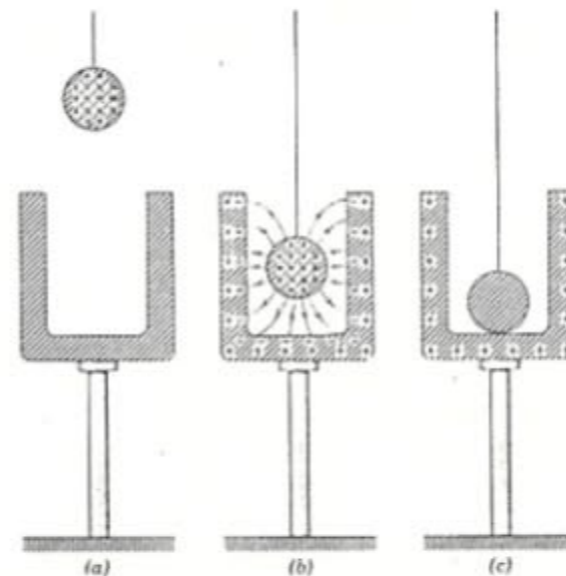


Figura 2-34

Cuando la bola metálica toca el recipiente, la bola y el depósito forman un *conductor aislado*, cuyo comportamiento se ajusta a lo descrito en el punto 2-12 página 31, el cual se expresaba que

*Si en un conductor aislado se coloca un exceso de cargas positivas o negativas están tienden a repelerse y debido a que el conductor permite el desplazamiento de cargas estas se separan lo máximo posible ubicándose en la superficie del mismo.*

Entonces, que la carga se mueve por completo a la superficie exterior del depósito puede demostrarse tocando el depósito con un pequeño objeto metálico aislado, sólo en la *parte exterior* del recipiente será posible tomar algo de carga.

### B-3. Campo Eléctrico de un dipolo

Una disposición interesante de cargas es el *dipolo eléctrico*. Este consiste en dos cargas opuestas,  $+q$  y  $-q$ , separadas por una distancia muy pequeña, tal como se representa en la figura 2-35.



Figura 2-35

Este tipo de configuración de carga ocurre muy frecuentemente en la naturaleza, particularmente en las moléculas. En la figura 2-36, se dan algunos ejemplos de moléculas que se pueden representar de esta forma, en donde  $q \approx e$  y  $a$  sería del orden de la distancia entre átomos. A una escala mayor, las antenas de radio y dispositivos conexos tienen cargas oscilatorias iguales pero opuestas en los dos extremos.



Figura 2-36

Calcularemos a continuación el campo eléctrico resultante de una distribución de carga de un dipolo, para ello consideremos la figura 2-37. Para calcular el campo eléctrico aplicaremos la Ley de Coulomb.

La componente del campo eléctrico en la dirección (+) es

$$E_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{[y_1^2 + (x_1 + \frac{1}{2}a)^2]}$$

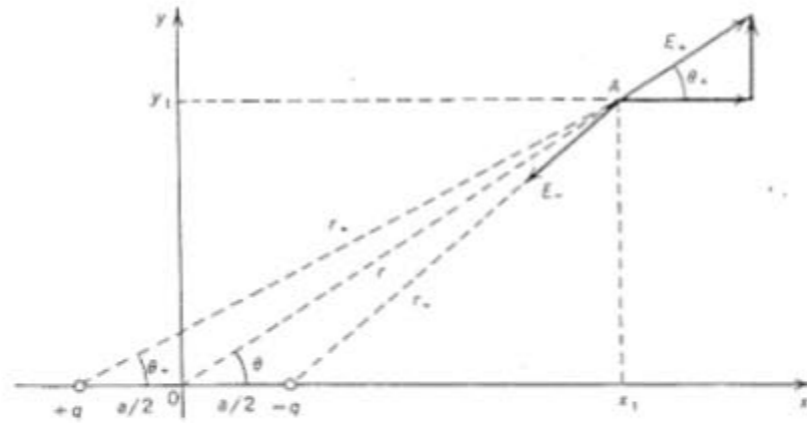


Figura 2-37

$$E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{[y_1^2 + (x_1 - \frac{1}{2}a)^2]}$$

Debemos tomar las componentes con objeto de encontrar la resultante, por lo tanto tenemos

$$E_{+x} = E_+ \cos\theta = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 [y_1^2 + (x_1 + \frac{1}{2}a)^2]} \frac{x_1 + \frac{1}{2}a}{[y_1^2 + (x_1 + \frac{1}{2}a)^2]^{1/2}}$$

$$E_{+x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x_1 + \frac{1}{2}a)}{[y_1^2 + (x_1 + \frac{1}{2}a)^2]^{3/2}}$$

Similarmente obtenemos

$$E_{-x} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x_1 - \frac{1}{2}a)}{[y_1^2 + (x_1 - \frac{1}{2}a)^2]^{3/2}}$$

El campo total dirigido en x, en P es por lo tanto

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{x_1 + \frac{1}{2}a}{[y_1^2 + (x_1 + \frac{1}{2}a)^2]^{3/2}} - \frac{x_1 - \frac{1}{2}a}{[y_1^2 + (x_1 - \frac{1}{2}a)^2]^{3/2}} \right]$$

(2-42)

El campo en la dirección y,  $E_y$ , puede encontrarse en forma similar

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{y_1}{[y_1^2 + (x_1 + \frac{1}{2}a)^2]^{3/2}} - \frac{y_1}{[y_1^2 + (x_1 - \frac{1}{2}a)^2]^{3/2}} \right] \quad (2-43)$$

Para muchos fines prácticos, el punto de observación A se aleja más del dipolo, de tal manera que se puede suponer que  $r \gg a$ . Similarmente, para una antena de radiotransmisión, la señal se recibe comúnmente a una distancia bastante alejada de la antena, de manera que aquí también  $r \gg a$ .

Si consideramos que  $r \gg a$ , las expresiones para  $E_x$  y  $E_y$ , ecuaciones 2-42 y 2-43, se pueden expresar de la siguiente manera

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q a}{r^3} (1 - 3 \cos^2 \theta) \quad (2-44)$$

$$E_y = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q a}{r^3} \sin 2\theta \quad (2-45)$$

La cantidad  $qa$  se denomina comúnmente el *momento dipolar del dipolo*, y se representa por la letra  $p$ . El ángulo  $\theta$  se muestra en la figura 2-37.

En la figura 2-38 se representa un dipolo, en el cual se ve la forma en que varía el campo eléctrico con el ángulo  $\theta$ . Obsérvese que, como se predice en las ecuaciones 2-44 y 2-45,  $E_y = 0$  cuando  $\theta = 0$ , ó  $\theta = \pi/2$ . Se observa también que  $E_x$  es simétrico en torno de  $\theta = 0$  y cambia de signo cuando  $\cos \theta = 1/\sqrt{3}$ .

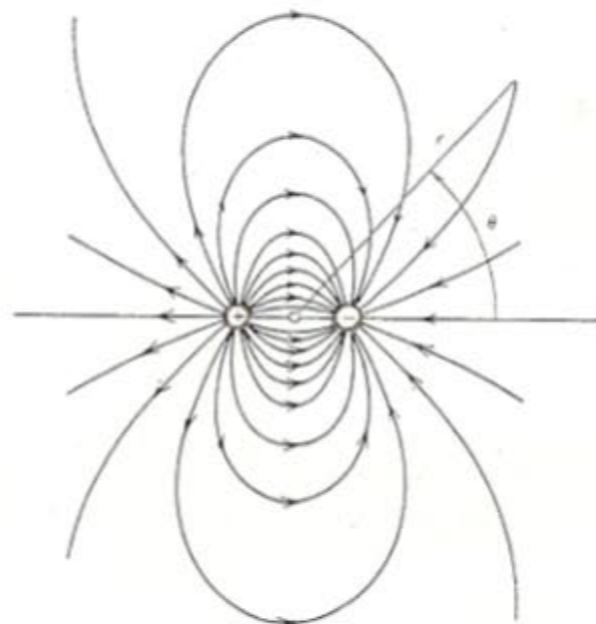


Figura 2-38

El campo eléctrico en cualquier punto se puede calcular mediante las ecuaciones 2-42 y 2-43 ó 2-44 y 2-45, pero es mucho más sencillo utilizar otro método que se verá en el capítulo 3, cuya deducción se realiza a partir del potencial eléctrico, en donde resulta más cómodo utilizar coordenadas polares  $r$  y  $\theta$ , y calcular el campo eléctrico en función de sus componentes rectangulares  $E_r$ , en el sentido en que aumenta  $r$ ; y  $E_\theta$ , en el sentido en que aumenta  $\theta$ .

#### B-4. Temas de lectura

##### B-4-1. Cables subterráneos de campo radial y no radial

Se denomina *cable*, en general, al conjunto formado por uno o varios *conductores* cableados, adecuadamente aislados, casi siempre provistos de uno o más recubrimientos protectores.

Dentro de los distintos tipos de cable existen los denominados *cables subterráneos*. Estos pueden ser *unipolares* (es decir que poseen un solo conductor) o *multipolares* (poseen más de dos conductores).

En la figura 2-39 y 2-40, se muestra un cable subterráneo unipolar y un cable subterráneo del tipo multipolar (en este caso por tener 3 conductores se lo denomina *tripolar*).

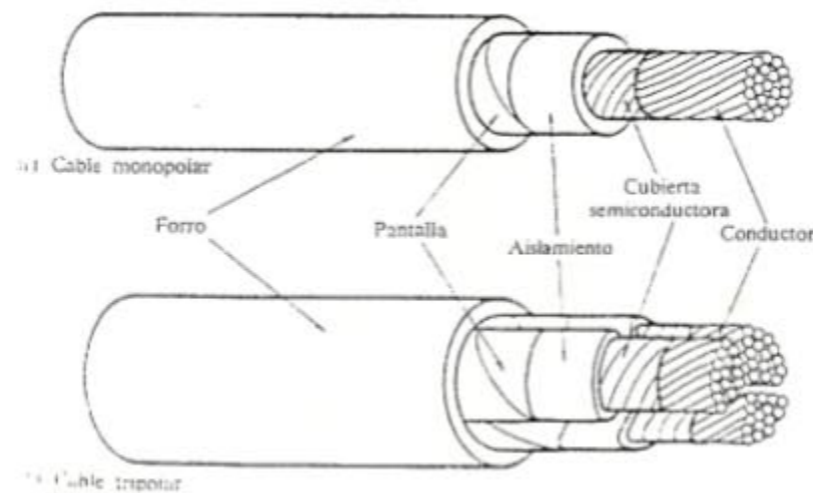


Figura 2-39



Figura 2-40

En un cable unipolar, las líneas de fuerza del campo electrostático tiene el aspecto representado en la figura 2-41, es decir, se trata de un campo radial, establecido entre la masa metálica del conductor y la envoltura metálica exterior. Por lo tanto, los esfuerzos eléctricos a este campo electrostático solo son soportados por el aislamiento del conductor.

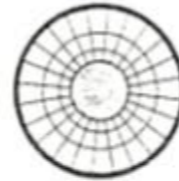


Figura 2-41

Pero en un cable tripolar, destinado a transportar una corriente trifásica (ver capítulo 9 CORRIENTE ALTERNA), con aislamiento conjunto de los tres conductores, el campo electrostático tiene la forma representada en la figura 2-42; ya no se trata de un campo radial sino que cada línea de fuerza puede descomponerse en dos componentes, una perpendicular y otra tangencial al aislante común. Esta desigualdad en las líneas de fuerza es debida a que los potenciales existentes entre cada uno de los conductores y la envoltura metálica exterior, no son simultáneamente iguales, debido al desigual reparto de tensiones existentes en todo sistema trifásico.

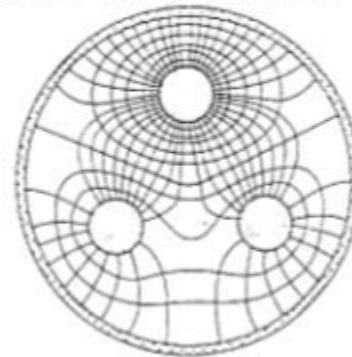


Figura 2-42

De las dos componentes del campo eléctrico a que hemos hecho referencia, la componente perpendicular a la capa aislante común ejerce un esfuerzo eléctrico sobre ésta que es soportado perfectamente por dicha capa, ya que la misma ha sido construida para soportarlo. Pero los esfuerzos debido a la componente tangencial son soportados por la masa de relleno existente entre los tres conductores, la cual tiene una resistencia de perforación que es, aproximadamente, la décima parte de la correspondiente a la capa aislante. En resumen, que existe el riesgo de una *perforación eléctrica* longitudinal, por lo que los cables de campo no radial solo tienen aplicación hasta tensiones inferiores a los 15KV.

A partir de este valor, debe procurarse que el campo sea radial, para lo cual existen actualmente, varios procesos para lograrlo.

Uno de ellos consiste en envolver sobre la capa aislante de cada conductor, una banda de papel metalizado, es decir como si se trataran de tres conductores unipolares con cunbierta común, la forma del campo resultante es la representada en la figura 2-43.

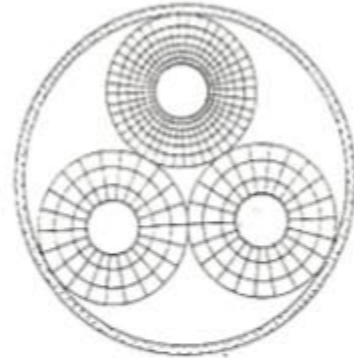


Figura 2-43

El relleno entre conductores queda casi exento de esfuerzos debidos al campo eléctrico tangencial. Las hojas metálicas individuales denominadas pantallas, deben ponerse a tierra conjuntamente con la envoltura metálica exterior. Estos cables se denominan *cables H*, o *cables de alma apantalladas*.