Capítulo **12**

Corrientes alternas(*)

(*) Texto completo extraído de
Fundamentos de Física
Tomo II
Electricidad y Magnetismo
Francis SEARS
Editorial Aguilar – Madrid – 1967

Corrientes alternas

12-1. Circuito en serie en corriente alterna.—En la sección 9-6 se explicó que un cuadro de hilo conductor, que gira con velocidad angular constante en un campo magnético uniforme, produce una fem alterna sinusoidal. Este sencillo dispositivo es el prototipo de los generadores industriales de corriente alterna, o alternadores, representándose en la figura 12-1 la estructura del inductor y del inducido. Alrededor de la circunferencia interna del *estator* están distribuídos cierto número de pares de polos. Como cada conductor situado sobre la superficie del inducido o *rotor* corta el campo magnético, se produce en él una fem inducida, en determinado sentido cuando el conductor pasa por un polo norte y en sentido opuesto cuando pasa por un polo sur. La fem inducida es, por consiguiente, alterna, y el número de ciclos completos en cada vuelta es igual al número de *pares* de polos. Esta disposición multipolar permite alcanzar una frecuencia suficientemente grande sin que sea necesario utilizar una velocidad angular peligrosamente elevada.

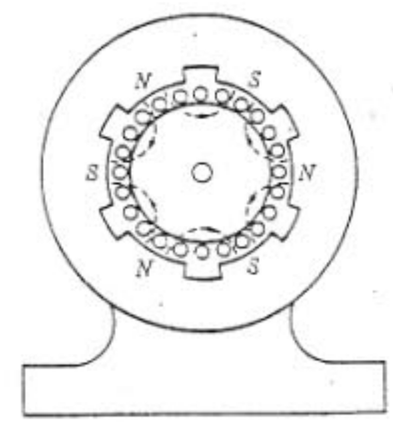


Fig. 12-1.—Esquema de un generador industrial de corriente alterna.

La fem inducida de un alternador industrial puede diferir de la forma sinusoidal perfecta, pero, a menos que no se diga expresamente otra cosa, supondremos en este capítulo que utilizamos un alternador que mantiene entre sus bornes una diferencia de potencial sinusoidal dada por

$$v = V_m \operatorname{sen} 2\pi f t. \qquad [12\text{-}1]$$

siendo v la diferencia de potencial instantánea, V_m la diferencia de potencial máxima y f la frecuencia, igual al número de revoluciones por segundo del rotor multiplicado por el número de pares de polos. En Norteamérica, para muchos de los alternadores, $f = 60$ ciclos/seg.

Vamos a determinar ahora la intensidad de corriente que se obtiene en un circuito cuando se mantiene entre sus bornes una diferencia de potencial sinusoidal alterna. Sea un circuito constituído por una resistencia, una autoinducción y un condensador, conectados en serie entre los bornes de un alternador, como se representa en la figura 12-2. La diferencia de potencial instantánea entre a y b es la suma de las diferencias de potencial instantáneas entre los bornes de R, L y C. Esto es,

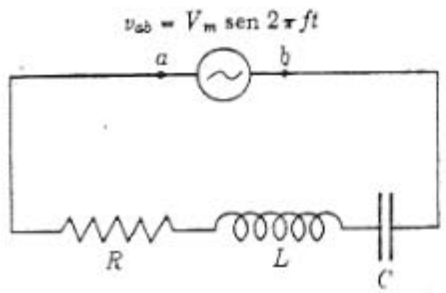


Fig. 12-2.—Circuito formado por una resistencia, una autoinducción y una capacidad dispuestas en serie.

$$V_m \text{ sen } 2\pi ft = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C},$$

siendo i, di/dt y q la intensidad instantánea de la corriente, su derivada respecto al tiempo y la carga del condensador, respectivamente.

Derivando esta ecuación respecto a t, y sustituyendo dq/dt por i, se obtiene:

$$2\pi f V_m \cos 2\pi ft = R\frac{di}{d} + L\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C}i.$$

Ésta es una ecuación diferencial de segundo orden, cuya solución es:

$$i = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(2\pi fL - \dfrac{1}{2\pi fC}\right)^2}} \text{ sen } (2\pi ft - \varphi) + A\,\varepsilon^{-bt},$$

donde

$$\varphi = \text{arc tg} \frac{2\pi fL - \dfrac{1}{2\pi fC}}{R}$$

Esta ecuación parece complicada pero su interpretación no es difícil.

Consideremos en primer lugar el término $A\varepsilon^{-bt}$. Las magnitudes A y b dependen de las constantes del circuito y de las condiciones iniciales, esto es, de los valores de V, i, di/dt y q en el instante de cerrar el circuito. El factor ε^{-bt} decrece exponencialmente con el tiempo y se hace despreciable al cabo de un tiempo suficiente (de ordinario muy pequeño). Este factor es *transitorio* y aunque en la práctica las diferencias de potencial y las corrientes transitorias pueden adquirir valores peligrosamente grandes, no los tendremos en cuenta y sólo consideraremos el primer término, que se denomina solución del *estado estacionario*.

Se ve que la corriente correspondiente al estado estacionario varia sinusoidalmente con el tiempo, lo mismo que el voltaje entre los bornes. Su valor máximo es:

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(2\pi fL - \dfrac{1}{2\pi fC}\right)^2}}$$

La intensidad de la corriente en el estado estacionario puede escribirse, por tanto,

$$i = I_m \text{ sen } (2\pi ft - \varphi). \qquad [12\text{-}2]$$

La frecuencia de la intensidad de la corriente es, por tanto, la misma que la del voltaje, pero ambas difieren en la fase, o sea, están desfasadas un ángulo φ.

Introduzcamos las siguientes simplificaciones:

$$2\pi f L = X_L,$$

$$\frac{1}{2\pi f C} = X_C,$$

$$2\pi f L - \frac{1}{2\pi f C} = X_L - X_C = X,$$

$$\sqrt{R^2 + X^2} = Z.$$

Entonces,

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{V_m}{Z}, \qquad [12\text{-}3]$$

$$\varphi = \text{arc tg}\,\frac{X}{R} \qquad [12\text{-}4]$$

La magnitud Z se denomina *impedancia* del circuito; X es la *reactancia*, y X_L y X_C son la *reactancia inductiva* y la *reactancia capacitiva*, respectivamente. Las impedancias y las reactancias se expresan en ohmios.

$\text{sen}^2\,\omega t = \cos^2\omega t$

$\text{sen}^2\,\omega t + \cos^2\omega t = 1$

$2\,\text{sen}^2\,\omega t = 1$

$\text{sen}^2\,\omega t = \frac{1}{2}$

La intensidad máxima de corriente está relacionada con la máxima diferencia de potencial por una ecuación que tiene la misma forma que la ley de Ohm, para las corrientes continuas, correspondiendo la impedancia Z a la resistencia R.

12-2. Medias cuadráticas o valores eficaces.—Los valores instantáneos de una intensidad de corriente, fem o diferencia de potencial alternas, varían de un modo continuo desde un valor máximo en un sentido, pasando por cero, hasta un máximo en sentido opuesto, y así sucesivamente. Es más cómodo estudiar las corrientes alternas considerando sus *valores cuadráticos medios* en lugar de sus valores máximos.

El valor cuadrático medio de la intensidad de una corriente variable se define como el valor de la intensidad de una corriente constante que desarrollase la misma cantidad de calor en igual tiempo y en la misma resistencia, y por esta razón se denomina al valor cuadrático medio, *valor eficaz* de la corriente variable.

La derivada respecto al tiempo de la cantidad de calor desarrollada en una resistencia R, que transporta una corriente alterna sinusoidal $i = I_m$ sen ωt, es:

Debido a que la función seno varía simétricamente alrededor de cero, el valor promedio es cero.

$$i^2R = I_m{}^2R\,\text{sen}^2\,\omega t.$$

La cantidad total de calor desarrollada en un tiempo T, igual a un período, es:

$$H = \int_0^T i^2R\,dt = I_m{}^2R\int_0^T \text{sen}^2\,\omega t\,dt = \tfrac{1}{2}\,I_m{}^2RT.$$

Serway pág 815

El valor cuadrático medio de una magnitud es la raíz cuadrada del valor promedio del cuadrado de esa magnitud.

$rms = \sqrt{valor^2}$

las siglas
rms = root mean square

La cantidad de calor desarrollada por una corriente de intensidad constante I_e en el mismo tiempo es:

$$H = I_e^2 RT.$$

Puesto que por definición de I_e las cantidades de calor son iguales,

$$I_e^2RT = \tfrac{1}{2} I_m^2 RT, \quad I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Por consiguiente, *si la intensidad de una corriente varía sinusoidalmente*, su valor eficaz es $1/\sqrt{2} = 0{,}707$ veces su valor máximo. Asimismo, el valor eficaz de una diferencia de potencial que varíe sinusoidalmente es $1/\sqrt{2}$ veces su valor máximo; p. ej., cuando se dice que la diferencia de potencial alterno entre los dos cables de una línea de suministro doméstico es 110 V, ello significa que la diferencia de potencial eficaz es 110 V, y, por consiguiente, la diferencia de potencial máxima será $110 \times \sqrt{2} = 155$ V.

Dividiendo por $\sqrt{2}$ el primero y el último miembros de la Ec. [12-3], obtenemos:

$$\frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{V_m/\sqrt{2}}{Z},$$

o sea,

$$I_e = \frac{V_e}{Z}. \qquad [12\text{-}5]$$

De ahora en adelante, se interpretará que las letras I, ε o V sin subíndices, se refieren a los valores eficaces de las magnitudes correspondientes. La Ec. [12-5] se escribirá, por tanto,

$$I = \frac{V}{Z}$$

Consideremos ahora los factores que determinan la resistencia, reactancia e impedancia de un circuito. En primer lugar, la resistencia de un conductor que transporta una corriente alterna puede no ser la misma que la resistencia del mismo conductor cuando transporta una corriente constante. La diferencia se debe al hecho de que la densidad de corriente en un hilo que transporta una corriente alterna no es uniforme en toda la sección del mismo, sino mayor junto a la superficie. Este fenómeno se conoce con el nombre de efecto cortical o «efecto *skin*». La sección efectiva del conductor se reduce y su resistencia aumenta. El efecto cortical es originado por la fem autoinducida creada por las variaciones del flujo interno en un conductor, y es mayor cuanto más elevada es la frecuencia. Aunque este efecto es un factor importante para las frecuencias utilizadas en radio, puede despreciarse de ordinario para las frecuencias de 60 ciclos/seg. La resistencia real de un conductor, a cualquier frecuencia, se denomina su *resistencia eficaz* para aquella frecuencia. A menos que explícitamente se diga otra cosa, no tendremos en cuenta el efecto cortical y supondremos que la resistencia de un conductor es independiente de la frecuencia.

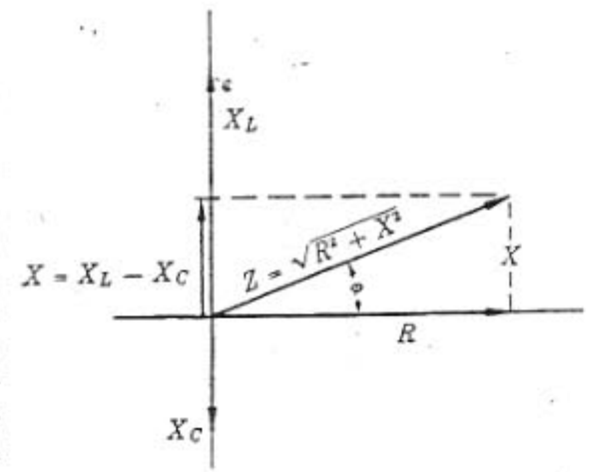


FIG. 12-3.—Diagrama del vector impedancia correspondiente al circuito en serie de la figura 12-2.

La reactancia de una autoinducción, $X_L = 2\pi fL$, es proporcional a la vez al coeficiente de autoinducción y a la frecuencia. Si hay un núcleo de hierro asociado al inductor, entonces el coeficiente de autoinducción no es constante, pero de nuevo para mayor sencillez no tendremos en cuenta esta variación.

La reactancia capacitiva, $X_C = 1/2\pi fC$, es inversamente proporcional a la capacidad y a la frecuencia.

La relación entre la impedancia Z de un circuito en serie y los valores de R, X_L y X_C puede representarse gráficamente considerando todas estas magnitudes como vectores. La resistencia R se representa por un vector situado sobre el eje X, y cuyo sentido coincide con el sentido positivo del mismo; y las reactancias X_L y X_C por vectores situados sobre el eje Y y en los sentidos positivo y negativo, respectivamente. La impedancia es el vector suma geométrica o resultante de estos tres vectores. Véase la figura 12-3, denominada *diagrama del vector impedancia* del circuito. Esta figura se ha dibujado para el caso $X_L > X_C$ y, por tanto, X es positiva. Si $X_L < X_C$, resulta X negativa y se dirige hacia abajo en vez de hacia arriba.

EJEMPLO.—Una resistencia de 600 Ω está conectada en serie con una autoinducción de 0,5 henrios y una capacidad de 0,2 μf. Calcúlese la impedancia del circuito y dibújese el diagrama del vector impedancia: *a*) para la frecuencia de 400 ciclos/seg; *b*) para 600 ciclos/seg.

a) Para 400 ciclos/seg:

$$X_L = 2\pi \times 400 \times 0{,}5 = 1256\ \Omega,$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi \times 400 \times 0{,}2 \times 10^{-6}} = 1990\ \Omega,$$

$$X = X_L - X_C = 1256 - 1990 = -734\ \Omega,$$

$$Z = \sqrt{(600)^2 + (-734)^2} = 949\ \Omega.$$ [Véase Fig. 16-4(*a*).]

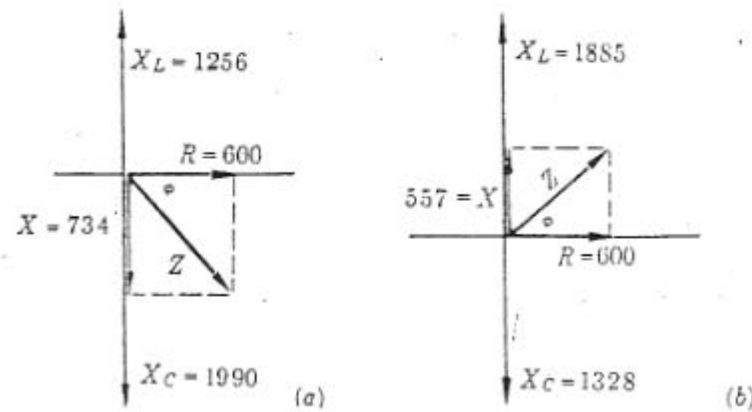


FIG. 12-4.—Diagramas del vector impedancia correspondientes al ejemplo de la sección 12-2. (a) f = 400 ciclos; (b) f = 600 ciclos.

b) Para 600 ciclos/seg:

$$X_L = 2\pi \times 600 \times 0{,}5 = 1885\ \Omega,$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi \times 600 \times 0{,}2 \times 10^{-6}} = 1328\ \Omega,$$

$$X = X_L - X_C = 1885 - 1328 = 557\ \Omega,$$

$$Z = \sqrt{(600)^2 + (557)^2} = 818\ \Omega. \text{ [Véase Fig. 12-4}(b)\text{.]}$$

12-3. Relación entre las fases del voltaje y de la intensidad de corriente.—La intensidad eficaz en un circuito en serie es igual a la razón del voltaje eficaz a la impedancia del circuito. Consideremos ahora la *fase* de la intensidad de corriente respecto a la del voltaje. Las Ecs. [12-1], [12-2] y [12-4] pueden escribirse juntas para mayor comodidad,

$$v = V_m \operatorname{sen} 2\pi f t,$$

$$i = I_m \operatorname{sen} (2\pi f t - \varphi),$$

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{X}{R}$$

El producto $2\pi f t$ representa un ángulo (en radianes), y su valor en cualquier instante t se denomina *fase* del voltaje. Análogamente, la magnitud $(2\pi f t - \varphi)$ se denomina fase de la intensidad de la corriente. Se dice que la corriente presenta una *diferencia de fase* con el voltaje, o que está *desfasada* un ángulo φ respecto al voltaje. Puesto que la reactancia X puede ser positiva o negativa, lo mismo le sucede al ángulo φ. Si $X_L > X_C$, X es entonces positiva, φ es positivo, y los máximos, mínimos, etc., de la intensidad de la corriente aparecen en instantes posteriores que los que corresponden al voltaje. Se dice que la intensidad está *retrasada* respecto al voltaje. Por el contrario, si $X_L < X_C$, X es negativa, φ también es negativo y la intensidad está *avanzada* respecto al voltaje.

El ángulo φ puede determinarse inmediatamente mediante el diagrama del vector impedancia, puesto que $\operatorname{tg}\varphi = X/R$. Véanse las figuras 12-4(a) y 12-4(b).

Como caso especial, es evidente que si un circuito está formado por una resistencia pura conectada a una diferencia de potencial alterna,

$$X = 0, \quad Z = R, \quad \varphi = 0,$$

y la intensidad y el voltaje están *en fase*, como indica la figura 12-5(a).

Si el circuito se compone de una autoinducción pura,

$$R = 0, \quad Z = X_L, \quad \varphi = + \frac{\pi}{2},$$

y la intensidad está retrasada respecto al voltaje un ángulo de $\pi/2$ radianes, o 90°, según indica la figura 12-5(b).

Si el circuito contiene sólo capacidad,

$$R = 0, \quad Z = X_C, \quad \varphi = - \frac{\pi}{2},$$

y la intensidad está avanzada respecto al voltaje un ángulo de 90°, como indica la figura 12-5(c)

La *intensidad* de la corriente tiene la misma fase en todas las partes de un circuito en serie; o sea, es máxima en la resistencia, la autoinducción y el condensador al mismo tiempo; nula en los tres un instante después; máxima, pero de sentido opuesto, otro instante todavía posterior, y así sucesivamente.

12-4. Diferencia de potencial entre los puntos de un circuito recorrido por una corriente alterna.—La diferencia de poten-

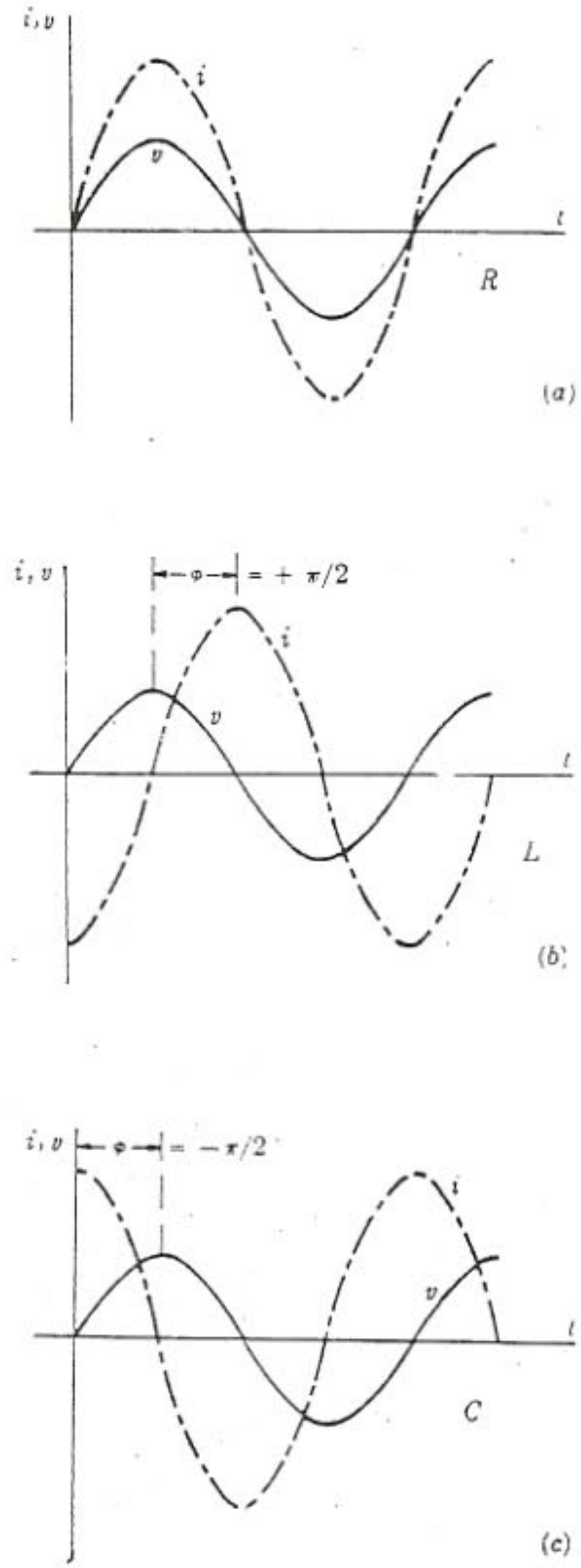


FIG. 12-5.—Relaciones entre las fases, de la diferencia de potencial y de la intensidad de la corriente, en el caso de circuitos especiales en los que hay únicamente: (a) resistencia; (b) autoinducción; (c) capacidad.

cial eficaz entre dos puntos cualesquiera de un circuito en serie es igual al producto de la intensidad eficaz por la impedancia del circuito entre los dos puntos considerados, siempre que no exista ninguna fem comprendida entre ellos:

$$V_{ab} = IZ_{ab}$$

La diferencia de fase φ entre V_{ab} e I es:

$$\varphi = \text{arc tg}\,\frac{X_{ab}}{R_{ab}}$$

En la figura 12-6, la impedancia Z_{ab} entre a y b es igual a R, puesto que no hay otros elementos de circuito entre estos puntos. Por consiguiente, $V_{ab} = IR$ y $\varphi = \text{arc tg}\ 0 = 0$. Esto es, *la diferencia de potencial entre los terminales de una resistencia pura está en fase con la intensidad de la corriente en la resistencia.* Entre los puntos b y c, $Z_{bc} = X_L$, $V_{bc} = IX_L$, $\varphi = \text{arc tg}\,\infty = +\pi/2$. *La diferencia de potencial entre los extremos de una autoinducción pura está avanzada 90° respecto a la intensidad.* Entre los puntos c y d, $Z_{cd} = X_C$, $V_{cd} = IX_C$, $\varphi = \text{arc tg}\,(-\infty) = -\pi/2$. *La diferencia de potencial entre los bornes de un condensador está retrasada 90° respecto a la corriente en el condensador.*

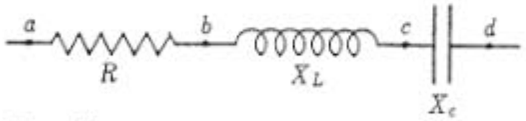


Fig. 12-6.—La diferencia de potencial eficaz V_{ad} entre los extremos del circuito *no* es igual a la suma aritmética de las diferencias de potencial V_{ab}, V_{bc}, V_{cd}.

Como ejemplo numérico, si la intensidad eficaz I de la corriente en la figura 12-6 es 5 A, $R = 8\,\Omega$, $X_L = 6\,\Omega$, $X_C = 12\,\Omega$, tenemos:

$$V_{ab} = IR \quad = 40 \text{ V}, \; v_{ab} \text{ e } i \text{ están en fase;}$$
$$V_{bc} = IX_L = 30 \text{ V}, \; v_{bc} \text{ está avanzada } 90^\circ \text{ respecto a } i;$$
$$V_{cd} = IX_C = 60 \text{ V}, \; v_{cd} \text{ está retrasada } 90^\circ \text{ respecto a } i.$$

La impedancia Z_{ad} del circuito completo es:

$$\sqrt{8^2 + (6 - 12)^2} = 10\,\Omega,$$

y la diferencia de potencial eficaz V_{ad}, en los extremos del circuito, será:

$$V_{ad} = IZ_{ad} = 5 \times 10 = 50 \text{ V},$$

aunque

$$V_{ab} + V_{bc} + V_{cd} = 130 \text{ V}.$$

Este ejemplo explica uno de los resultados inesperados que se producen en los circuitos recorridos por corrientes alternas; a saber: la suma de las diferencias de potencial eficaces entre los extremos de cierto número de elementos de un circuito en serie, *no* es igual a la diferencia de potencial eficaz entre los extremos del circuito en conjunto. Esta anomalía se explica, no obstante, sencillamente: si se tienen en cuenta

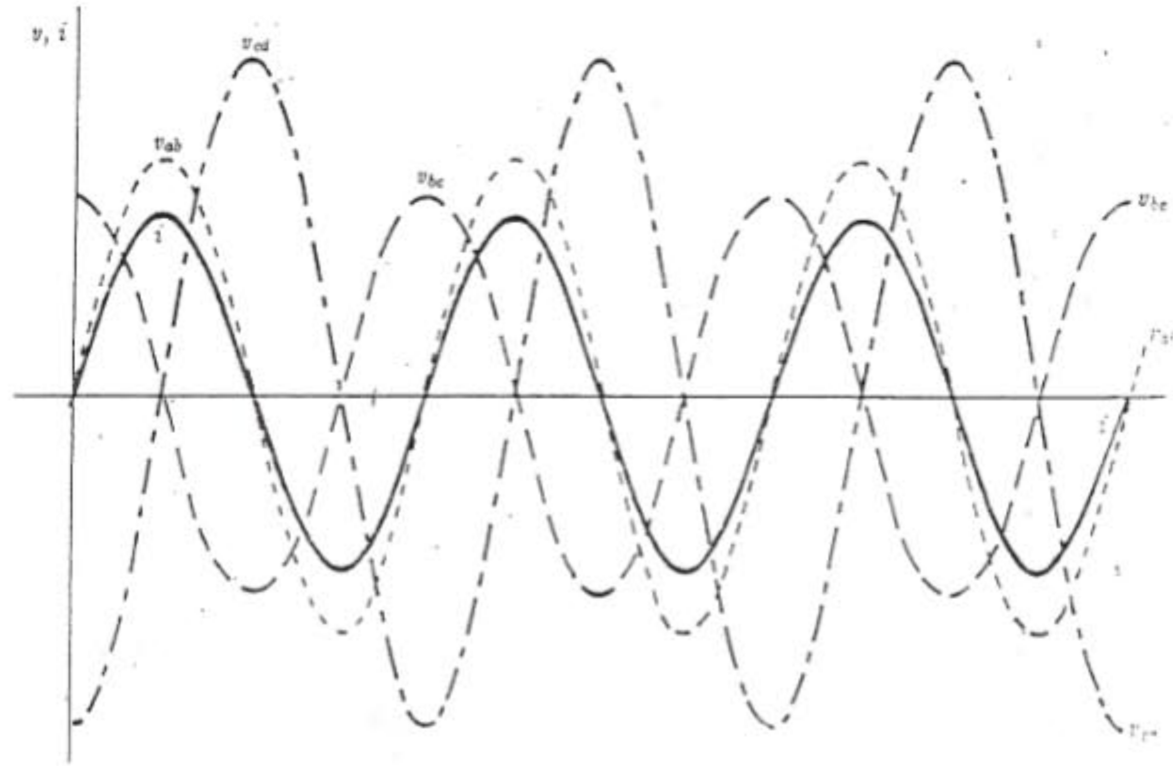


FIG. 12-7.—Relaciones entre las fases de v_{ab}, v_{bc}, v_{cd} e i para el circuito de la figura 1 -6.

las relaciones de fase entre las diferencias de potencial de las distintas partes.

La figura 12-7 debe estudiarse cuidadosamente. La línea llena representa la intensidad instantánea de la corriente, la misma en todas las partes del circuito, y que tiene un valor máximo de $5\sqrt{2}$ A. Las otras tres curvas representan las diferencias de potencial instantáneas entre a y b; b y c, y c y d, cuyos valores máximos son $10\sqrt{2}$, $30\sqrt{2}$ y $60\sqrt{2}$ V, respectivamente, y cuyas diferencias de fase con relación a i son las representadas.

La diferencia de potencial *instantánea* v_{ad} es igual a la suma de las diferencias de potencial instantáneas v_{ab}, v_{bc} y v_{cd}. Si se suman las tres curvas de trazos, la curva obtenida representa, por tanto, la diferencia de potencial instantánea entre a y d. Esta curva está representada en la figura 12-8. Su valor máximo es $50\sqrt{2}$ V, y su valor eficaz 50 V, como debía ser. Está retrasada 37º respecto a la intensidad de corriente, lo cual coincide con el valor de φ calculado por la fórmula

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{6 - 12}{8} = -0{,}75; \text{ de donde } \varphi = -37^\circ$$

12-5. Diagramas de vector rotatorio.—La dificultad evidente de dibujar e interpretar diagramas tales como los de las figuras 12-7 y 12-8 hace deseable introducir algún método gráfico más sencillo para repre-

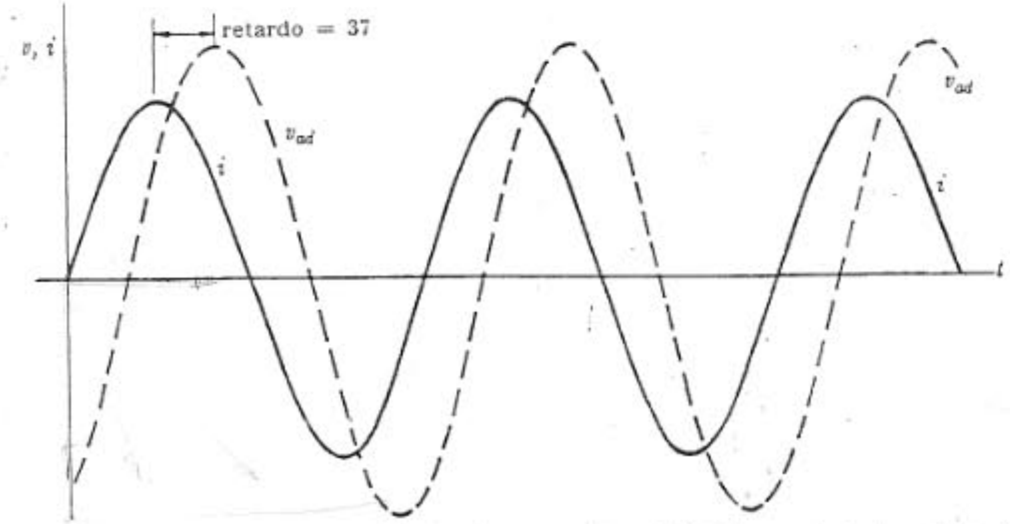


FIG. 12-8.—Diferencia de potencial instantánea v_{ad} e intensidad de la corriente i en el circuito de la figura 12-6.

sentar las relaciones de fase entre intensidades y diferencias de potencial en los circuitos de corriente alterna, lo que puede conseguirse como sigue. Supongamos que se desea representar una corriente que varie sinusoidalmente, de frecuencia f y valor máximo I_m. Construyamos un vector I_m como el de la figura 12-9 a cierta escala conveniente, e imaginemos que este vector esté girando alrededor de O en sentido contrario al de las agujas de un reloj con una velocidad angular uniforme $\omega = 2\pi f$ rad/seg. Si el vector ocupa la posición horizontal en el instante $t = 0$, su proyección o componente sobre un eje vertical, en cualquier instante t, será igual al valor de la corriente en dicho instante, puesto que según la figura 12-9 la componente vertical es:

$$I_m \operatorname{sen} \theta = I_m \operatorname{sen} 2\pi ft = i.$$

Naturalmente, el diagrama sólo representa el valor de i en un instante determinado, pero el lector puede suplir la rotación mentalmente, y seguir las fluctuaciones de i cuando I_m gira. Este método es equivalente al que se utiliza para representar un movimiento armónico simple por la proyección sobre un diámetro de un punto que se mueve en una circunferencia con velocidad angular constante.

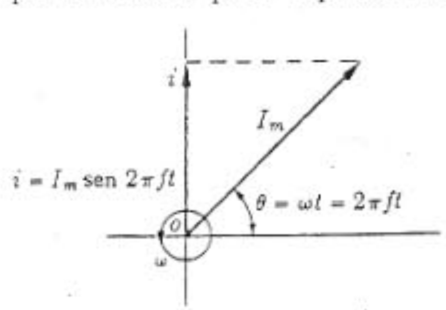


FIG. 12-9.—Representación de una corriente alterna por medio de un vector rotatorio.

Si se desea representar en el mismo diagrama los valores instantáneos de una diferencia de potencial dada $v = V_m \operatorname{sen} (2\pi ft - \varphi)$, que tenga la misma frecuencia que la corriente, pero retrasada respecto a ésta un ángulo φ, se construye un segundo vector de longitud V_m a cierta escala conveniente, pero

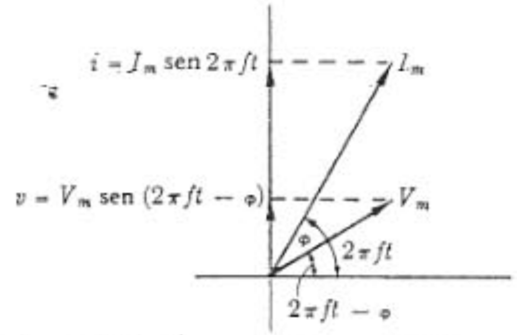


FIG. 12-10.—Representación vectorial de una diferencia de potencial y una corriente alternas.

desplazado respecto a I_m un ángulo φ en el sentido de las agujas de un reloj. Cuando ambos vectores giran en sentido contrario al de las agujas del reloj, es evidente que los valores instantáneos de v presentarán siempre un retardo de fase φ respecto a los de i.

Tomemos de nuevo como ejemplo el circuito de la figura 12-6, y representemos por este método del vector rotatorio la intensidad y las diferencias de potencial entre los extremos de las distintas partes del circuito. Para representar la intensidad de la corriente bastará un solo vector I_m, figura 12-11, ya que éste tiene el mismo valor y la misma fase en todas las partes del circuito. La diferencia de potencial entre los bornes de la resistencia está representada por el vector $V_{m_{ab}}$ que tiene la misma dirección que I_m, puesto que v_{ab} e i están en fase, y cuya longitud es $40\sqrt{2}$ V. Análogamente, los vectores $V_{m_{bc}}$ de longitud $30\sqrt{2}$ V y $V_{m_{cd}}$ de longitud $60\sqrt{2}$ V representan la diferencia de potencial avanzada entre los bornes de la autoinducción y la diferencia de potencial retardada entre los bornes del condensador. Las componentes de cada uno de estos vectores, y la rotación de todo el diagrama pueden ser suplidas mentalmente por el lector. Cuando los vectores giran, sus componentes verticales experimentan las mismas variaciones que las ordenadas de las cuatro curvas de la figura 12-7.

¿Qué sucede con las diferencias de potencial entre a y d, de la figura 12-6? El valor instantáneo de esta diferencia de potencial se encontró en la figura 12-8 sumando las ordenadas de las tres curvas de trazos de la figura 12-7. Utilizando el diagrama del vector rotatorio, esto se obtiene sumando las componentes verticales de $V_{m_{ab}}$, $V_{m_{bc}}$ y $V_{m_{cd}}$. Pero la suma de las componentes verticales de estos vectores es igual a la componente vertical de su suma geométrica o resultante. Por tanto, si esta resultante se obtiene por cualquier método adecuado, como el de la figura 12-12, su componente vertical representa la diferencia de potencial instantánea entre los extremos del circuito, y el ángulo φ, que forma con I_m, indica la diferencia de fase del circuito en conjunto. La propia resultante repre-

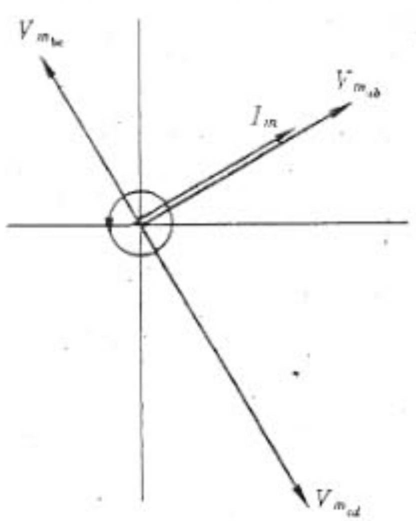


FIG. 12-11.—Representación vectorial de i, V_{ab}, V_{bc} y V_{cd} para el circuito de la figura 12-6.

senta, por tanto, la diferencia de potencial máxima entre a y d, o sea $V_{m_{ad}}$.

Aunque el diagrama del vector rotatorio es esencialmente un método para representar valores instantáneos, en la práctica se utiliza casi siempre exclusivamente con los valores eficaces y las diferencias de fase. Si imaginamos que se modifica la escala de las figuras 12-11 ó 12-12 en el factor $\sqrt{2}$, los mismos vectores que representan valores máximos, corresponderán en la nueva escala a valores eficaces, permaneciendo invariables los ángulos que representan diferencias de fase. Por ello es práctica normal construir estos diagramas con los vectores que representan los valores eficaces en lugar de los valores máximos. Si se desean los valores instantáneos sólo es necesario imaginar multiplicada por $\sqrt{2}$ la longitud de todos los vectores y suponer el diagrama en rotación.

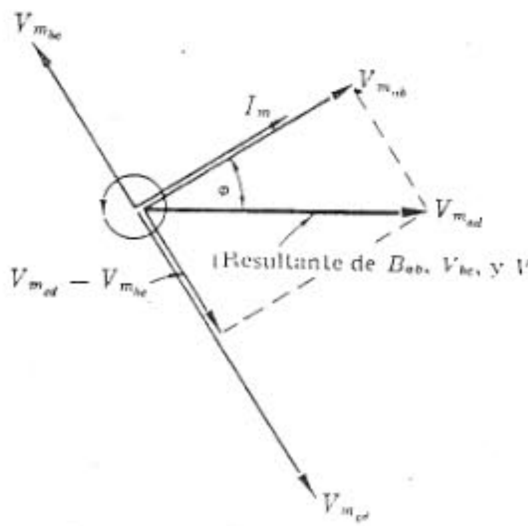


FIG. 12-12.—Representación vectorial de V_{ad} e i para el circuito de la figura 16-6.

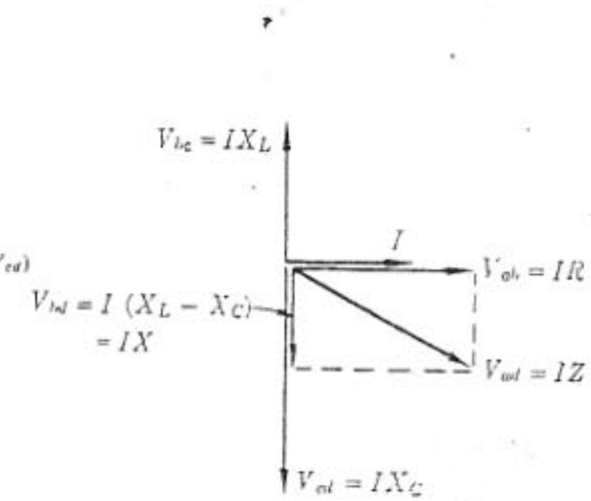
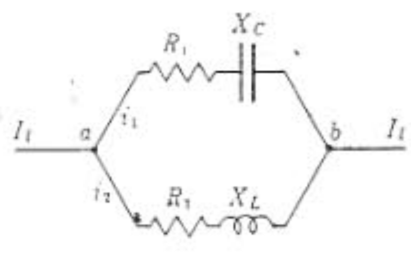


FIG. 12-13.—Diagrama vectorial para el circuito de la figura 16-6, donde los vectores representan valores eficaces.

Es completamente arbitraria la orientación que se dé al diagrama vectorial. En un circuito en serie se comienza de ordinario por dibujar el vector intensidad formando un ángulo cualquiera y se construyen los otros vectores con la orientación relativa adecuada. Se omiten generalmente los ejes X e Y.

La figura 12-13 es la misma figura 12-12, salvo que el vector intensidad es horizontal y que la escala se ha modificado para que los vectores representen valores eficaces. Puesto que $V_{ab} = IR$, $V_{bc} = IX_L$, $V_{cd} = IX_C$ y $V_{ad} = IZ$, los vectores voltaje están relacionados exactamente del mismo modo que los vectores en un diagrama de vector impedancia tal como el de la figura 12-3. En efecto, el diagrama del vector voltaje de un circuito en serie puede obtenerse a partir de su diagrama de vector impedancia, multiplicando cada vector resistencia, reactancia o impedancia por la intensidad.

12-6. Circuitos en paralelo.—Consideremos el acoplamiento en paralelo de los elementos del circuito de la figura 12-14(a). La diferencia de potencial instantánea v_{ab} en los extremos de las dos derivaciones es la misma. La intensidad i_1 en la derivación superior (capacitiva) estará avanzada respecto a v_{ab}; la de la derivación inferior (inductiva) estará retardada. Según la regla de los nudos de Kirchhoff, la intensidad *instantánea* I_l de la línea es igual a la suma de las intensidades *instantáneas* i_1 e i_2. El diagrama vectorial del circuito está dibujado en la figura 12-14(b). El vector V_{ab} representa la diferencia de potencial común entre los extremos de cada derivación, y los vectores I_1 e I_2, las intensidades. I_1 está avanzada respecto a V, un ángulo $\varphi_1 = \text{arc tg } X_1/R_1$; I_2 está retrasada respecto a V un ángulo $\varphi_2 = \text{arc tg } X_2/R_2$. La intensidad en la línea está representada por I_l, suma geométrica de I_1 e I_2, y φ es la diferencia de fase entre la intensidad en la línea y V.



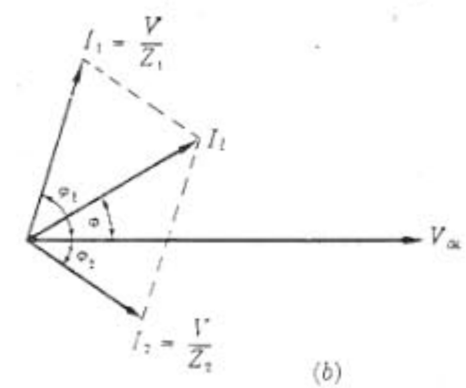


FIG. 12-14.—(a) Agrupación en paralelo de elementos de circuito. (b) Diagrama vectorial correspondiente.

Se define la *impedancia equivalente* del circuito como la razón de V_{ab} a la intensidad en la línea I_l. Es evidente que si V_{ab} y las constantes del circuito son conocidas (datos), el cálculo de I_l lleva consigo el cálculo de las intensidades individuales en ambas derivaciones, y sus diferencias de fase. Por consiguiente, la impedancia equivalente puede expresarse en función de las resistencias y reactancias de las derivaciones. La expresión que resulta es algo complicada y no la daremos, aunque puede deducirse fácilmente mediante la figura 12-14(b).

12-7. Resonancia.—Un caso particular de interés se presenta en un circuito en serie que contiene autoinducción y capacidad, cuando L, C y f tienen valores tales que $2\pi fL = 1/2\pi fC$, esto es, cuando $X_L = X_C$. Entonces $X = 0$, $Z = R$ y $\varphi = \text{arc tg } X/R = 0$. La impedancia del circuito es simplemente igual a su resistencia, y la intensidad está en fase con la diferencia de potencial entre los bornes del circuito. La corriente que atraviesa un circuito resonante en serie, si su resistencia es pequeña, será grande, y la diferencia de potencial entre los bornes de la autoinducción y de la capacidad puede ser mucho mayor que la que existe a través de todo el circuito.

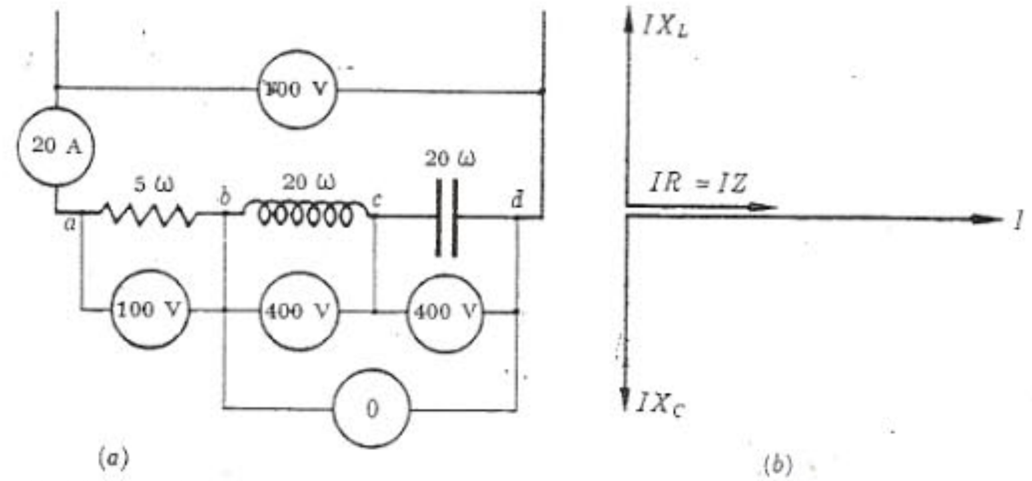


FIG. 12-15.—(a) Circuito resonante en serie. (b) Diagrama vectorial correspondiente.

Como ejemplo, consideremos un circuito en serie en el cual $R = 5\ \Omega$, $X_L = 20\ \Omega$, $X_C = 20\ \Omega$, conectado a una diferencia de potencial alterna cuyo valor eficaz es 100 V [Fig. 12-15(a)]. La intensidad de la corriente en el circuito es:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{R} = \frac{100}{5} = 20\ \text{A}.$$

La diferencia de potencial entre los bornes de la resistencia,

$$V = IR = 20 \times 5 = 100\ \text{V}.$$

La diferencia de potencial entre los bornes de la autoinducción,

$$V = IX_L = 20 \times 20 = 400\ \text{V}.$$

La diferencia de potencial entre las armaduras del condensador,

$$V = IX_C = 20 \times 20 = 400\ \text{V}.$$

Y la diferencia de potencial entre los extremos de la combinación autoinducción-capacidad (V_{bd}) es:

$$V = IX = 0.$$

El diagrama del vector rotatorio para un circuito resonante en serie está representado en la figura 12-15(b). Se verá que las diferencias de potencial instantáneas entre los extremos de la autoinducción y del condensador están desfasadas 180°, y aunque los valores eficaces de cada una pueden ser grandes, su resultante en todo instante es nula. En consecuencia un voltímetro aplicado entre b y d, figura 12-15(a), indicará cero.

La figura 12-16(a) representa un circuito en paralelo en el cual $X_L = X_C$, siendo R la misma en cada derivación. La intensidad eficaz es, por consiguiente, igual en cada derivación, estando una de estas corrientes

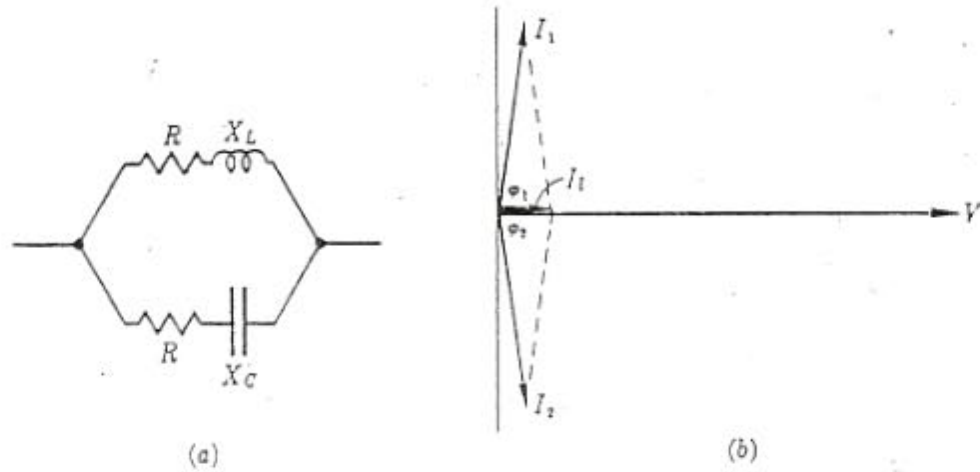


FIG. 12-16.—(a) Circuito resonante en paralelo ($X_L = X_C$). (b) Diagrama vectorial correspondiente.

retardada y la otra adelantada el mismo ángulo respecto a la diferencia de potencial. Si X_L y X_C son mucho mayores que R, las diferencias de fase son aproximadamente 90° y, como resulta evidente de la figura 12-16(b), la intensidad I_l en la línea es mucho menor que la intensidad en cada derivación. De otra forma, la impedancia equivalente, V/I_l, del circuito en conjunto es muy elevada, mucho mayor que la de una cualquiera de las derivaciones. De modo bastante paradójico, cuanto menor es la resistencia, mayor es la impedancia, ya que cuando R tiende a cero, las diferencias de fase tienden a 90°, y la corriente de la línea tiende a cero. Se dice que el circuito está en *resonancia paralela.*

Debe evitarse la resonancia en las líneas de transporte de energía, puesto que, indudablemente, resultarán intensidades de corriente y diferencias de potencial elevadas en ciertas partes del circuito. Por el contrario, en los circuitos de radio se aprovecha la ventaja de la resonancia en el proceso de *sintonización.* El circuito de antena de un radiorreceptor contiene una autoinducción y un condensador en serie. Las estaciones emisoras comprendidas dentro del intervalo de frecuencia del receptor inducen en este circuito fuerzas electromotrices de frecuencias iguales a las frecuencias portadoras de dichas estaciones. Cuando el condensador de sintonía se ajusta de modo que el circuito esté en resonancia con la frecuencia de una estación deseada, la intensidad de corriente que corresponde a aquella frecuencia particular es grande, y se obtiene una diferencia de potencial también grande entre las armaduras del condensador; pero, como un condensador sólo puede estar en resonancia para una frecuencia, las otras estaciones no producirían más que intensidades y diferencias de potencial despreciables, y, por consiguiente, no serán oídas.

La condición necesaria para la resonancia es:

$$2\pi f L = \frac{1}{2\pi f C}$$

de la cual deducimos:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1/C}{L}} \qquad [12\text{-}6]$$

Se recordará que esta ecuación tiene la misma forma que la de la frecuencia de un sistema mecánico oscilante, $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$. La autoinducción representa la masa inerte y la capacidad corresponde a la inversa de la constante recuperadora. En efecto, la frecuencia f dada por la Ec. [12-6] puede considerarse como la frecuencia *natural* del circuito eléctrico (Sec. 17-1), y el circuito resuena cuando la frecuencia que lo hace oscilar es igual a este valor.

12-8. Potencia en los circuitos de corriente alterna.—La potencia instantánea suministrada a un dispositivo eléctrico en el cual hay una corriente alterna es igual al producto de la diferencia de potencial instantánea entre los extremos del dispositivo por la intensidad instantánea de la corriente. La potencia instantánea P varía como indica la figura 12-17, en la cual la gráfica de la potencia se ha obtenido multiplicando las curvas que representan v e i:

$$P = vi \text{ (valores instantáneos).}$$

Hemos demostrado que se suministra energía a un dispositivo eléctrico si el sentido de la corriente en él es del borne de potencial más elevado al de potencial más bajo. Si el sentido de la corriente es del borne de potencial más bajo al de potencial más alto, el dispositivo está suministrando energía al circuito. Entre los puntos a y b de la figura 12-17, donde las curvas v e i son ambas positivas, tenemos el primer caso, y se suministra energía al dispositivo. Entre los puntos b y c, la diferencia de potencial está invertida, mientras que el sentido de la corriente no se

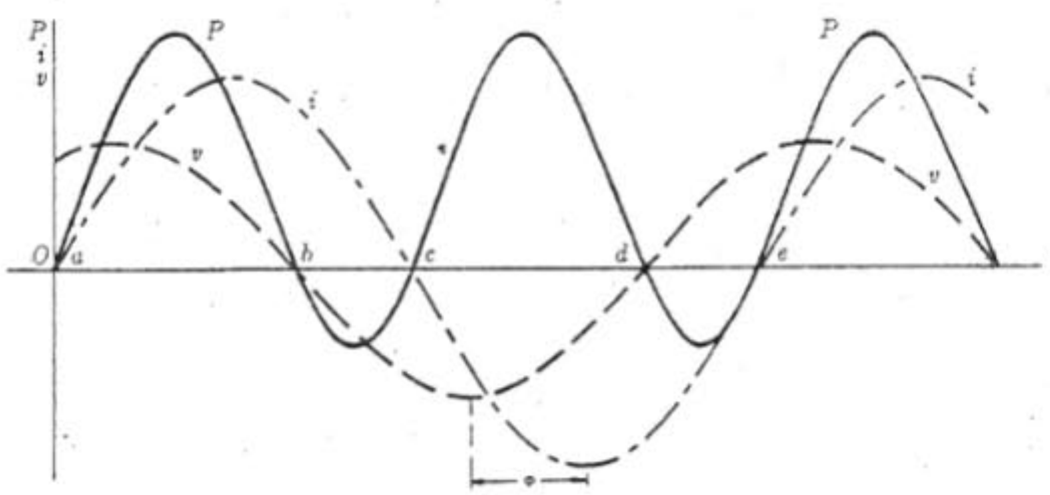


FIG. 12-17.—La potencia instantánea P es el producto de la diferencia de potencial instantánea por la intensidad instantánea de la corriente.

ha modificado. Por consiguiente, durante este intervalo el dispositivo restituye energía al circuito. Entre c y d, tanto v como i han cambiado de sentido, y se suministra de nuevo energía al dispositivo. Donde la curva de potencial es positiva, como entre a y b, o c y d, se suministra energía al dispositivo (una cantidad por segundo igual a la ordenada de la curva de potencia) y donde la curva es negativa, como entre b y c, la energía es restituída al circuito.

La cantidad total de energía suministrada en el tiempo t está representada gráficamente por el área *neta* comprendida entre la curva de potencia y el eje Ot, durante dicho tiempo, o analíticamente por

$$W = \int_0^t P\, dt.$$

La potencia media es igual a la energía total suministrada dividida por el tiempo, o sea,

$$\frac{W}{t} = P_{media} = \frac{1}{t}\int_0^t P\, dt.$$

Cuando se habla de *la* potencia suministrada a un dispositivo que se encuentra en un circuito de corriente alterna, quiere decirse potencia media. La potencia eficaz carece de sentido. En general, v e i están desfasadas un ángulo φ; esto es,

$$v = V_m \operatorname{sen} \omega t,$$

$$i = I_m \operatorname{sen} (\omega t - \varphi).$$

Si se efectúa el producto de v por i, y después se calcula la media durante un intervalo de tiempo igual a un periodo se obtiene:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T V_m I_m \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} (\omega t - \varphi) dt$$

$$= \frac{V_m I_m}{2} \cos \varphi, \quad \text{o sea,}$$

$$\boxed{P = VI \cos \varphi} \qquad [12\text{-}7]$$

Esto es, la potencia media suministrada a un dispositivo que se encuentra en un circuito de corriente alterna, es igual al producto de la diferencia de potencial eficaz, por la intensidad de corriente eficaz y por el coseno del ángulo de desfase. La magnitud $\cos \varphi$ se denomina *factor de potencia* del dispositivo. Según sea la naturaleza del dispositivo, dicho factor puede tener cualquier valor comprendido entre cero (cuando $\varphi = 90°$) y la unidad (cuando $\varphi = 0°$).

Un factor de potencia nulo significa que el dispositivo consiste en una reactancia pura, inductiva o capacitiva. En virtud de la Ec. [12-7], la potencia media suministrada a dicho dispositivo es nula, lo cual es cierto evidentemente, dado que la energía suministrada a un condensador o a una autoinducción se emplea en crear un campo eléctrico o un campo magnético, y toda esta energía se recupera cuando el campo desaparece posteriormente.[1] Durante las fases del ciclo en las cuales el campo disminuye, la reactancia restituye energía al circuito y ayuda a girar al generador.

Si el circuito contiene a la vez resistencia y reactancia (y ningún dispositivo mecánico tal como un motor), se tiene:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}, \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z}$$

y la Ec. [12-7] se convierte en

$$P = \frac{VIR}{Z},$$

y dado que

$$\frac{V}{Z} = I,$$

$$P = I^2 R \qquad [12\text{-}8]$$

como en el caso de la corriente continua. Naturalmente, si el circui contiene un motor, $\operatorname{tg} \varphi$ no es igual a X/R, y la Ec. [12-8] no es ar cable. Sin embargo, la Ec. [12-7] es cierta para cualquier circuito.

Un factor de potencia pequeño (ángulo grande de avance o retraso es un inconveniente en los circuitos que transportan energía, pues co una diferencia de potencial dada, es necesaria una corriente de gran intensidad para suministrar una potencia determinada, con las consiguientes pérdidas de calor en las líneas de transporte. Como muchos tipos de maquinaria de corriente alterna transportan corriente en retraso respecto al potencial, este caso puede presentarse. Cabe corregirlo conectando un condensador en paralelo con la carga. La corriente avanzada del condensador compensa la corriente retrasada de la otra rama del circuito. El condensador por si mismo no absorbe potencia neta de la línea.

Un motor sincrónico con su campo *superexcitado* toma también de la línea una corriente avanzada y se utiliza a veces para corregir el factor de potencia.

La potencia suministrada a (o por) un dispositivo en corriente continua puede medirse con un amperímetro y un voltímetro o por un vatímetro. En un circuito de corriente alterna la potencia no puede medirse

[1] Excepciones: *a*) Si existe histéresis, no se recupera toda la energía suministrada al circuito. *b*) A frecuencias elevadas la energía es *radiada* desde el circuito en forma de ondas electromagnéticas.

con un amperimetro y un voltímetro, ya que cada uno de ellos sólo indica los valores eficaces y no se tienen en cuenta las relaciones de fase o factor de potencia. Un electrodinamómetro tipo vatímetro, por el contrario, incluye automáticamente la corrección debida al factor de potencia e indica la verdadera potencia suministrada. El mismo tipo de vatímetro se utiliza para medidas en corriente continua o en corriente alterna.

El par desviador instantáneo τ de un electrodinamómetro es proporcional al producto de las intensidades instantáneas en las bobinas fija y móvil. Cuando se conecta como vatímetro, una de estas intensidades es proporcional a la intensidad en la línea y la otra a la diferencia de potencial. Esto es,

$$\tau = kvi,$$

siendo k una constante de proporcionalidad. Pero

$$v = V_m \operatorname{sen} \omega t,$$
$$i = I_m \operatorname{sen} (\omega t - \varphi).$$

Por consiguiente,

$$\tau = kI_m V_m \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} (\omega t - \varphi).$$

Con corriente alterna, la desviación del vatímetro es proporcional al par *medio*, o sea, a

$$\bar{\tau} = \frac{k}{T} \int_0^T I_m V_m \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} (\omega t - \varphi) dt,$$

y, en virtud de la Ec. [12-7],

$$\bar{\tau} = kVI \cos \varphi = kP,$$

siendo la desviación proporcional a la potencia media.

Si se conectan simultáneamente en corriente alterna, como se indica en la figura 12-18, un amperímetro, un voltímetro y un vatímetro, pueden medirse V, I y P independientemente. Éste es un método experimental mediante el cual se mide el factor de potencia de un dispositivo.

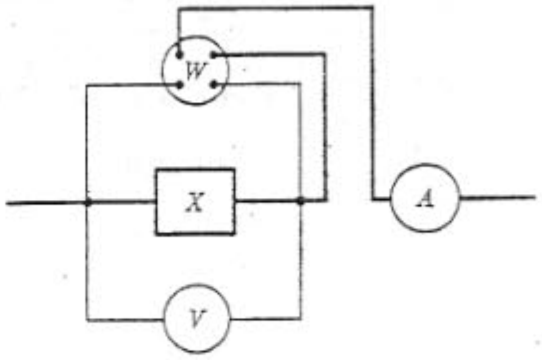


Fig. 12-18.—Medida del factor de potencia de un circuito utilizando simultáneamente un amperímetro, un voltímetro y un vatímetro para corriente alterna.

12-9. Transformador.—Por razones de rendimiento es conveniente transportar la energía eléctrica a potenciales elevados e intensidades de corriente pequeñas, con la reducción consiguiente de la cantidad de calor I^2R perdida por segundo en la línea de transporte. Por otra parte, las condiciones de seguridad y de aislamiento de las partes móviles requieren voltajes relativamente bajos en los equipos generadores, en los motores y en las instalaciones domésticas. Una de las propiedades más útiles de los circuitos de corriente alterna es la facilidad y rendimiento elevado con que pueden variarse, por medio de transformadores, los valores de los voltajes (e intensidades de las corrientes).

En principio, el transformador se compone de dos enrollamientos aislados eléctricamente entre sí y devanados sobre el mismo núcleo de hierro (Fig. 12-19). Una corriente alterna que circula por uno de los enrollamientos, crea en el núcleo un campo magnético alterno. La mayor parte de este flujo atraviesa el otro enrollamiento e induce en él una fem alterna. La potencia es transmitida así de un enrollamiento a otro por medio del flujo del núcleo. El enrollamiento al cual se suministra potencia se denomina *primario*, y el que cede potencia es el *secundario*. Cualquiera de los enrollamientos puede utilizarse como primario. El símbolo de un transformador con un núcleo de hierro es .

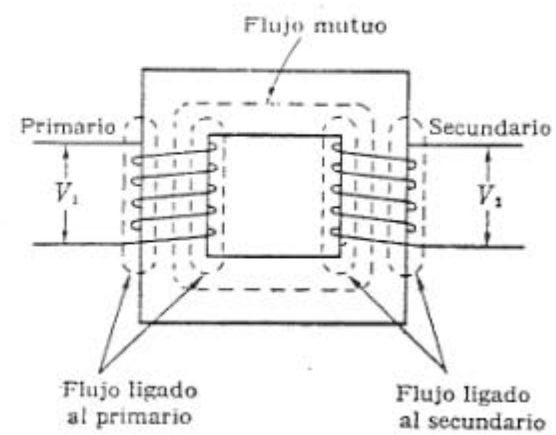


FIG. 12-19.—Transformador con núcleo de hierro.

En cualquier transformador real las líneas de flujo no están confinadas enteramente en el hierro, sino que algunas de ellas vuelven a través del aire como indica la figura 12-19. La parte de flujo que atraviesa a la vez los enrollamientos primario y secundario, se denomina flujo *mutuo*. La parte que sólo atraviesa el primario es el *flujo ligado al primario*, y la parte de flujo que atraviesa únicamente el secundario es el *flujo ligado al secundario*.

La potencia obtenida de un transformador es necesariamente inferior a la potencia suministrada al mismo, a causa de las inevitables pérdidas en forma calorífica. Estas pérdidas consisten en el calentamiento I^2R de los devanados primario y secundario (pérdidas del cobre), y en la histéresis y corrientes de Foucault en el núcleo (pérdidas del núcleo). La histéresis se reduce al mínimo utilizando hierro que tenga un ciclo de histéresis estrecho, y las corrientes de Foucault se reducen al mínimo con un núcleo formado por láminas. A pesar de estas pérdidas, los rendimientos de los transformadores sobrepasan el 90 %, y en las grandes instalaciones pueden alcanzar el 99 %.

Para simplificar, consideremos un transformador ideal en el cual no haya pérdidas ni fugas de flujo. Supongamos que el circuito secundario está abierto. El enrollamiento primario funciona entonces simplemente como una autoinducción. La corriente en el primario, que es pequeña, está retrasada 90º respecto al voltaje del primario y se denomina corriente *magnetizante*, I_m. La potencia suministrada al transformador es nula. El flujo del núcleo está en fase con la corriente del primario. Puesto que el mismo flujo atraviesa tanto el primario como el secundario, la fem inducida *por vuelta* es la misma en ambos. La razón de la fem inducida en el secundario a la fem inducida en el primario es igual, por consiguiente, a la razón del número de vueltas del secundario al primario, o sea,

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

En el caso ideal supuesto, las fuerzas electromotrices inducidas ε_1 y ε_2 son iguales numéricamente a los voltajes correspondientes V_1 y V_2 en los bornes. Por consiguiente, eligiendo adecuadamente la razón de los números de vueltas, N_2/N_1, puede obtenerse en el secundario cualquier voltaje que se desee partiendo de un voltaje dado en el primario. Si $V_2 > V_1$, tenemos un transformador *elevador*, si $V_2 < V_1$, un transformador *reductor*.

El diagrama vectorial de un transformador ideal está representado en la figura 12-20 para una razón de espiras $N_2/N_1 = 2$. Las fuerzas electromotrices inducidas tanto en el primario como en el secundario, siendo proporcionales y de signo opuesto a la derivada del flujo, estarán retrasadas 90º respecto a éste, pero puesto que la fem (ε_1) inducida en el primario es una fuerza contraelectromotriz, el voltaje (V_1) en los bornes del primario es opuesto a ella en fase. ($V_1 = -\varepsilon_1$.)

Consideremos a continuación el efecto de cerrar el circuito secundario. La corriente I_2 en el secundario (Fig. 12-21) y su fase φ_2 dependerán, naturalmente, de la naturaleza del circuito secundario. Se ha supuesto en la figura 12-21 que la carga es inductiva y, por consiguiente, I_2, está retardada respecto a V_2. Tan pronto como se cierra el circuito secundario, éste ha de suministrar cierta potencia (excepto cuando $\varphi_2 = 90º$) y, en

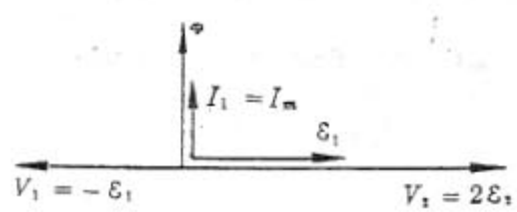


FIG. 12-20.—Diagrama vectorial de un transformador ideal funcionando en vacío. La corriente en el secundario es nula, y la corriente en el primario es, únicamente, la corriente magnetizante.

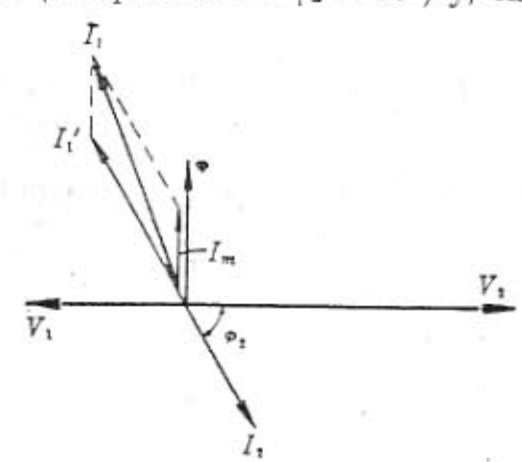


FIG. 12-21.—Diagrama vectorial de un transformador ideal sometido a una carga inductiva.

virtud de consideraciones energéticas, ha de suministrarse una cantidad igual de potencia al primario. El proceso por el cual el transformador es capaz de absorber la necesaria cantidad de potencia es como sigue. Cuando el circuito secundario está abierto, el flujo del núcleo es producido únicamente por la corriente del primario, pero cuando se cierra el circuito secundario, tanto la corriente del primario como la del secundario crean flujo en el núcleo. En virtud de la ley de Lenz, la corriente del secundario tiende a debilitar el flujo del núcleo y, por consiguiente, a disminuir la fuerza contraelectromotriz en el primario. Pero (en ausencia de pérdidas), la fuerza contraelectromotriz en el primario ha de ser igual al voltaje en los bornes del primario que suponemos fijo. La corriente en el primario aumenta, por consiguiente, hasta que el flujo del núcleo se restablece en su valor inicial, sin carga. El vector I_1' de la figura 12-21 representa la *variación* que tiene lugar en la corriente del primario cuando el secundario suministra la intensidad I_2. Esta variación está en oposición de fase con la intensidad I_2 del secundario y es de valor tal que su fuerza magnetomotriz (N_1I_1') es igual y opuesta a la fuerza magnetomotriz (N_2I_2) de la corriente en el secundario. Esto es,

$$N_2I_2 = N_1I_1',$$

o sea,

$$\frac{I_2}{I_1'} = \frac{N_1}{N_2} \qquad [12\text{-}9]$$

La intensidad resultante en el primario, I_1, es la suma vectorial de I_1' y de la corriente magnetizante I_m. Pero en la práctica la corriente magnetizante no es nunca superior a un tanto por ciento pequeño de la corriente de plena carga. En consecuencia, I_1 e I_1' son prácticamente iguales y se puede escribir de un modo aproximado teniendo en cuenta la Ec. [12-9],

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} \qquad [12\text{-}10]$$

Esto es, las corrientes del primario y del secundario son *inversamente* proporcionales a los números de espiras de los arrollamientos primario y secundario.

El efecto de la dispersión de flujo y las resistencias de los arrollamientos requiere que el voltaje en los bornes del primario sea algo mayor que la fem inducida en el primario, y no esté desfasada exactamente 180° respecto a ella. Análogamente, el voltaje en los bornes del secundario es algo menor que la fem inducida en el secundario, y está algo desfasado respecto a ella.