ELECTROSTÁTICA

3. LEY DE GAUSS

En Campo Eléctrico se estudian los fenómenos eléctricos producidos por diferentes distribuciones de cargas estáticas y sus efectos sobre otras partículas cargadas.

La Ley de Gauss constituye un medio para obtener expresiones de campo eléctrico con suficientes condiciones de simetría.

3. Ley de Gauss

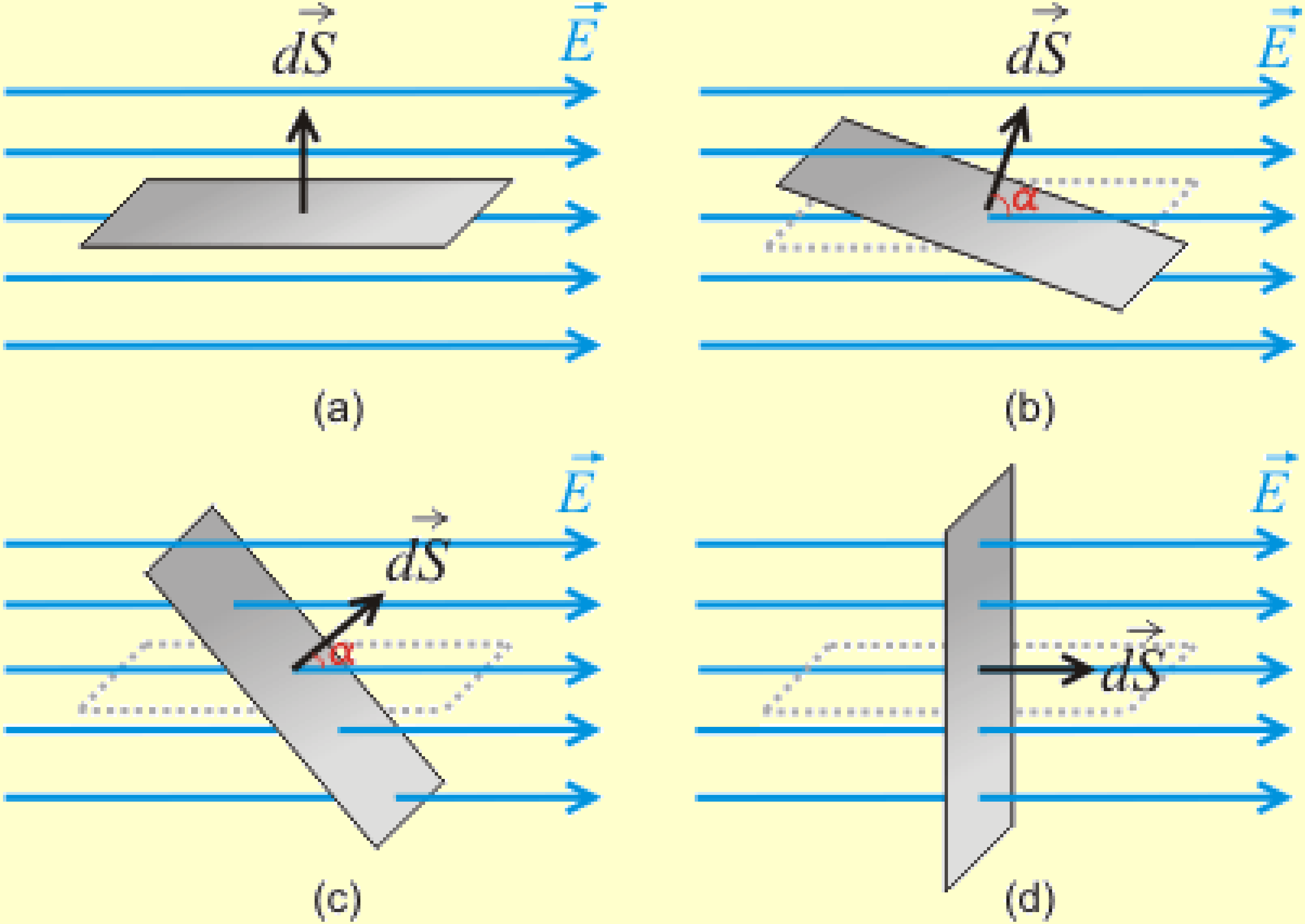
3.1. Flujo de un campo vectorial
- 3.1.1. A través de una superficie elemental
- 3.1.2. A través de una superficie finita abierta
- 3.1.3. A través de una superficie cerrada
- 3.1.4. Unidades

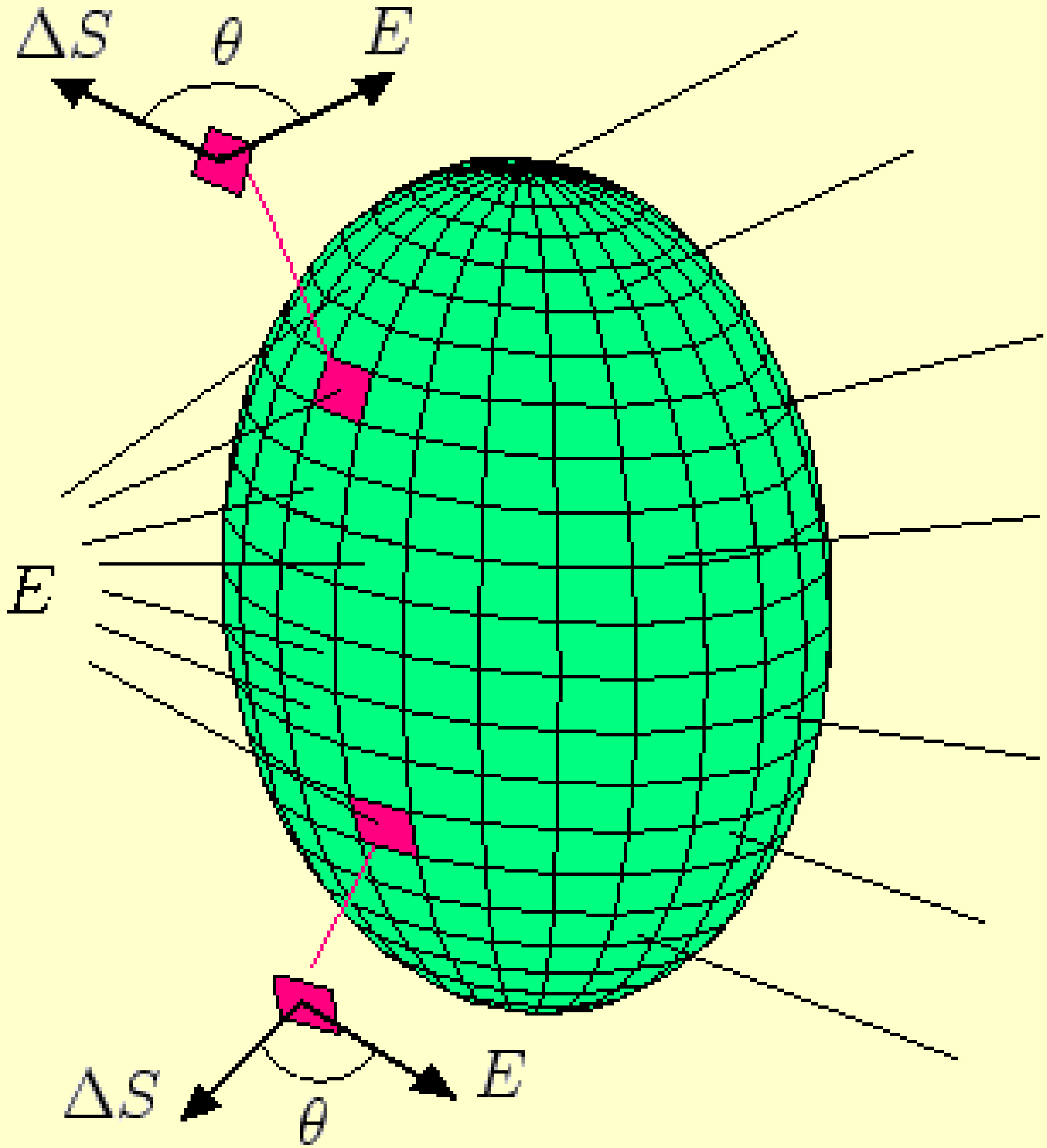
3.2. Ley de Gauss

3.3. Aplicaciones de la Ley de Gauss
- 3.3.1. Campo eléctrico creado por una carga puntual
- 3.3.2. Campo eléctrico creado por una distribución de carga lineal uniforme de longitud infinita.
- 3.3.3. Campo eléctrico creado por un cilindro conductor de longitud infinita con carga distribuida.
- 3.3.4. Campo eléctrico creado por una esfera conductora cargada
- 3.3.5. Campo eléctrico creado por una placa dieléctrica infinita con carga superficial.
- 3.3.6. Campo eléctrico creado por una placa conductora infinita cargada superficialmente.

3.4. Conductor aislado.

3.5. Ejemplos y aplicaciones.

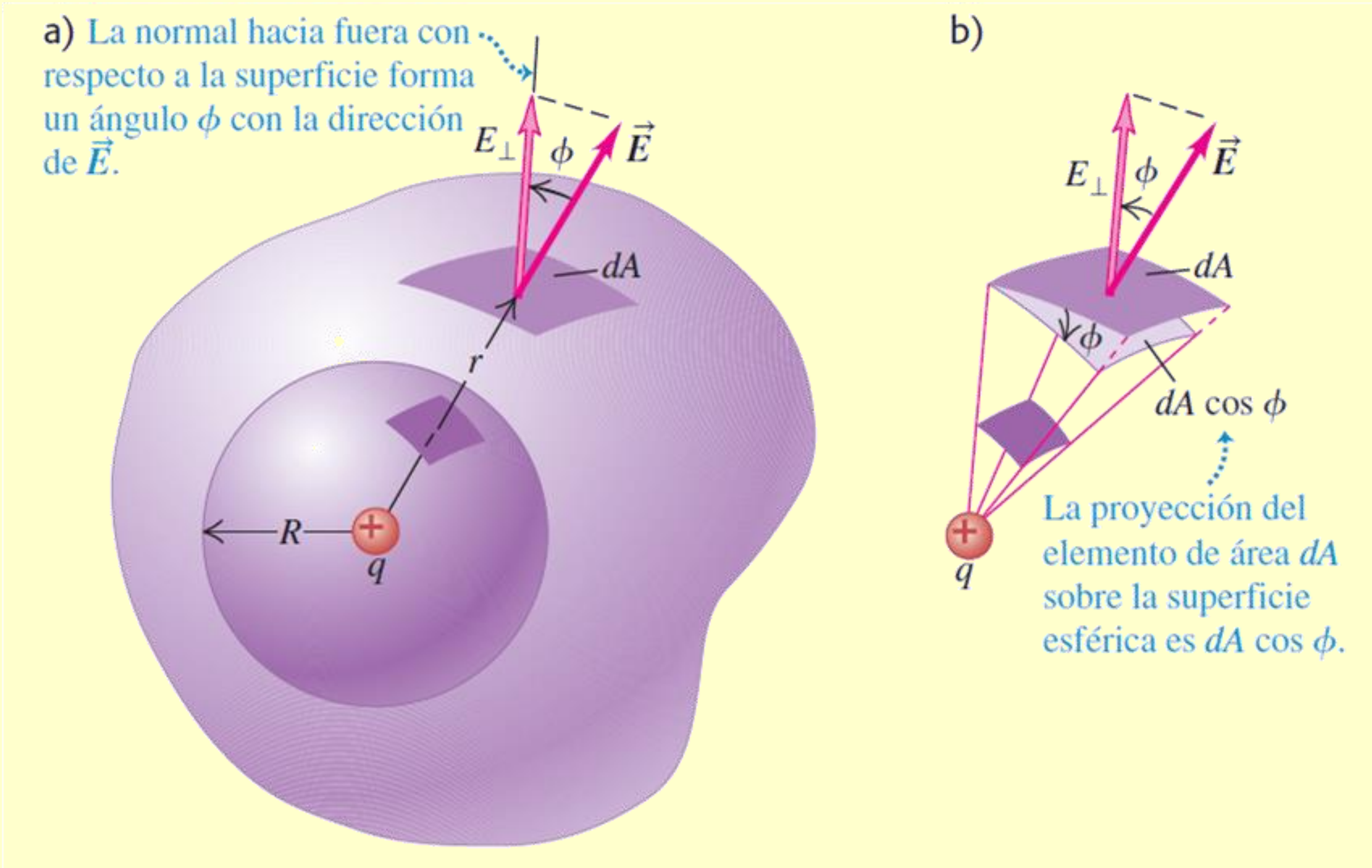

$\vec{dS}$
$\vec{E}$
(a)
$\vec{dS}$
$\vec{E}$
α
(b)
$\vec{E}$
$\vec{dS}$
α
(c)
$\vec{E}$
$\vec{dS}$
(d)



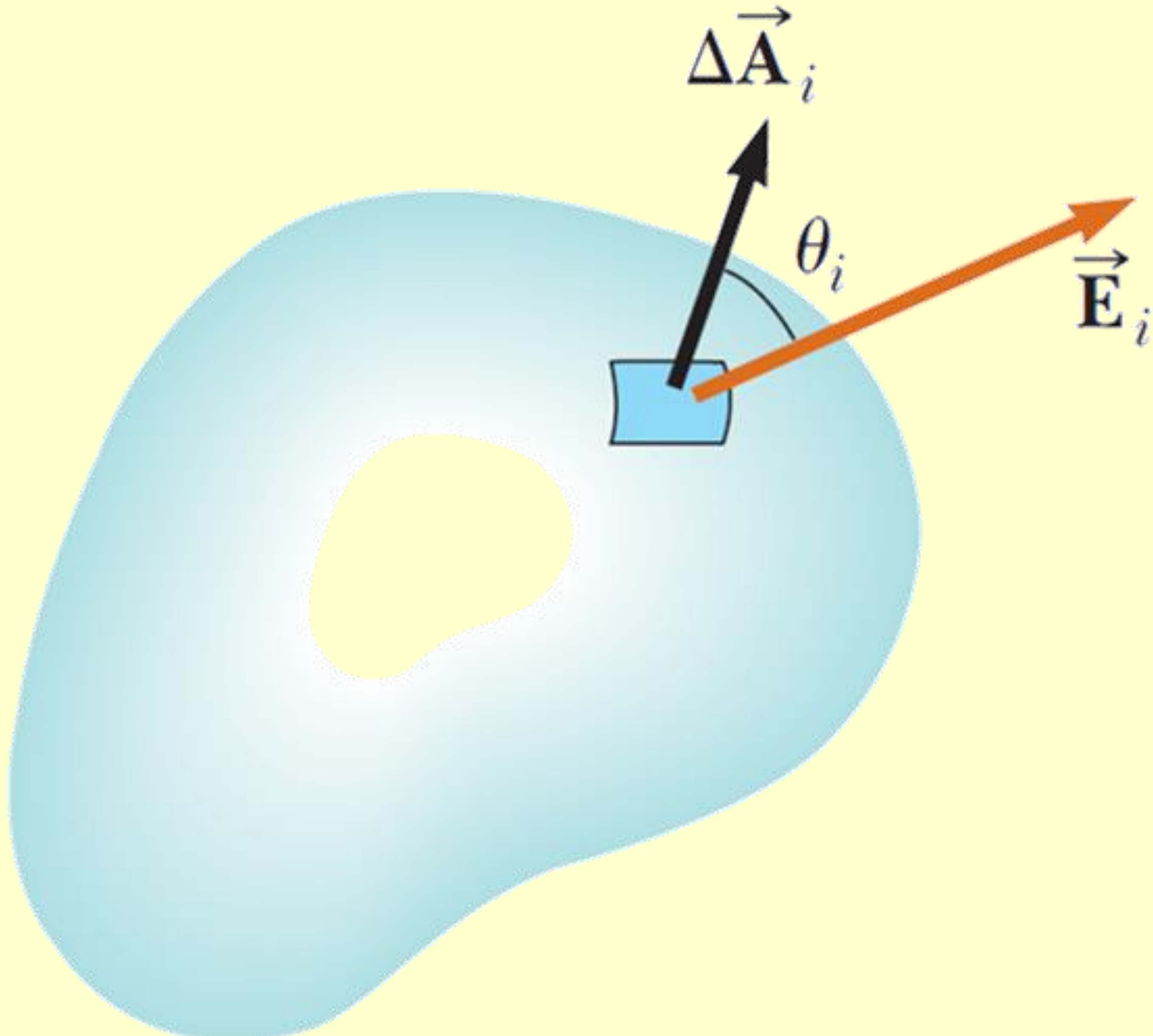
ΔS
θ
E
E
ΔS
E
θ

Carl Friedrich Gauss
(1777 – 1855)

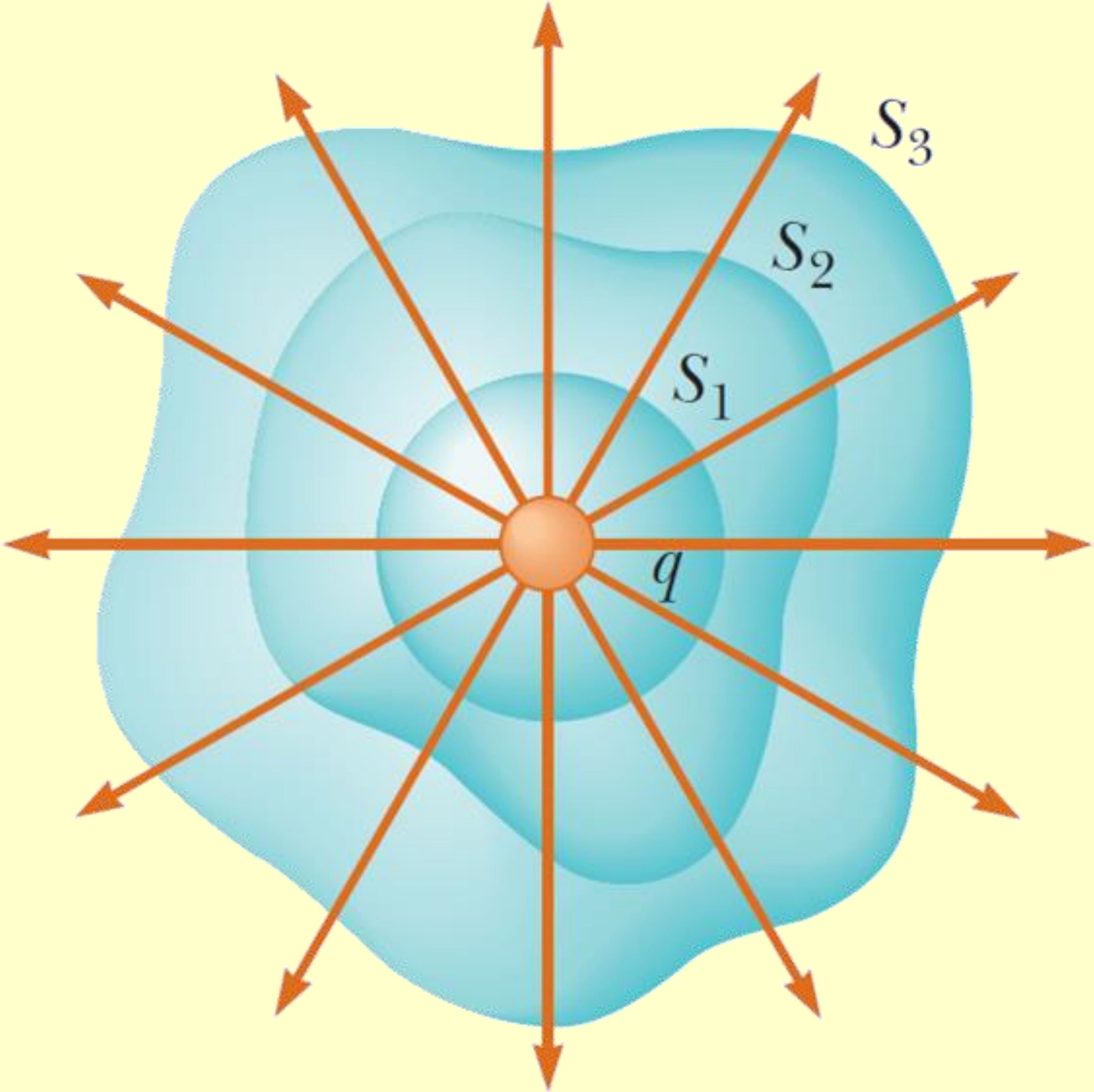
En 1831 desarrollaría junto con Wilhelm Weber importantes aspectos del magnetismo, y es por ello que la unidad de inducción magnética en el sistema cegesimal lleva su nombre. Como culminación de su aportación a la física, en 1835 daría vida al importante Teorema de Flujo de Gauss

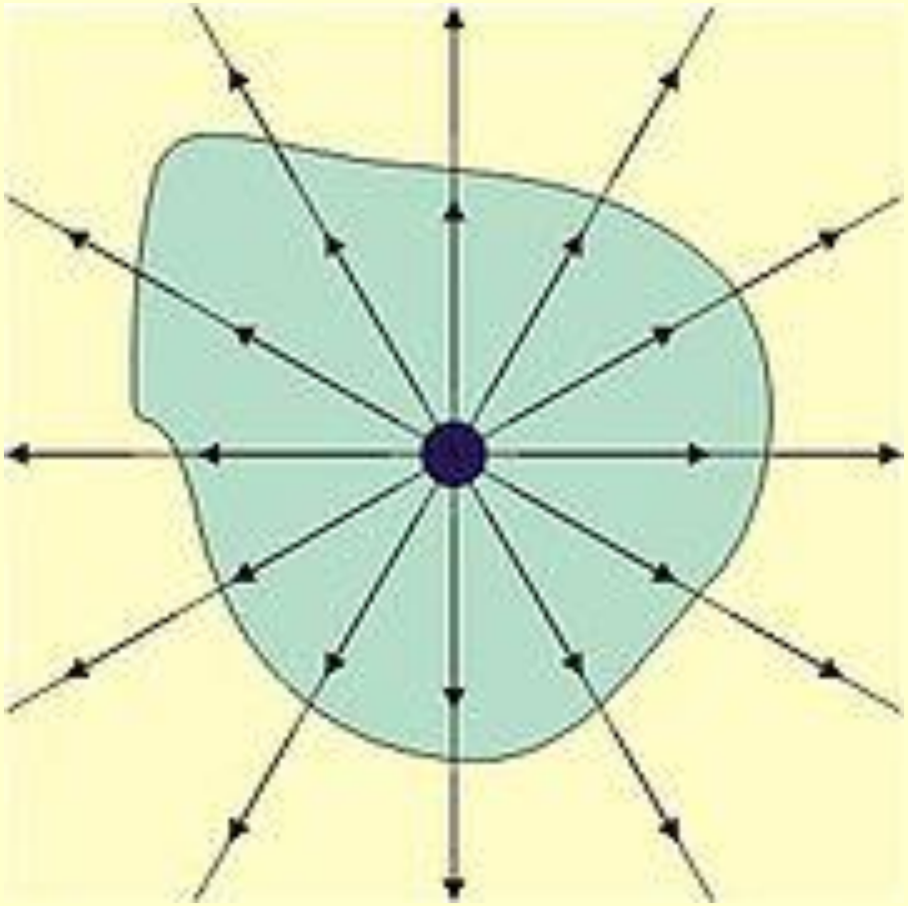


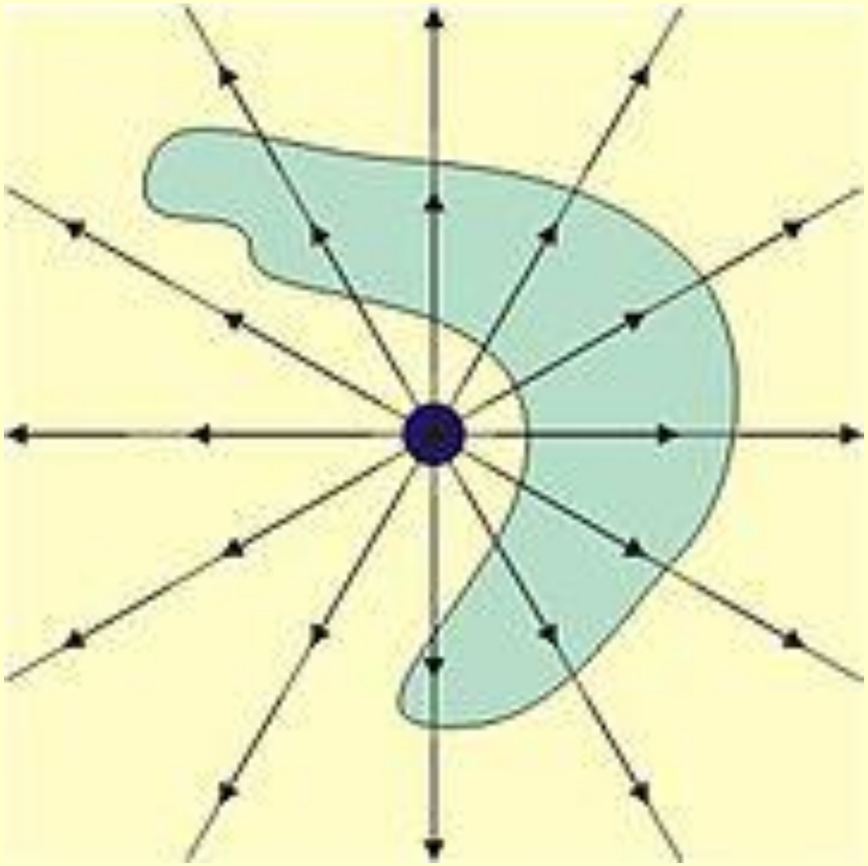
a) La normal hacia fuera con respecto a la superficie forma un ángulo ϕ con la dirección de $\vec{E}$.
$E_\perp$
ϕ
$\vec{E}$
dA
r
R
q
b)
$E_\perp$
ϕ
$\vec{E}$
dA
ϕ
$dA \cos \phi$
q
La proyección del elemento de área dA sobre la superficie esférica es $dA \cos \phi$.

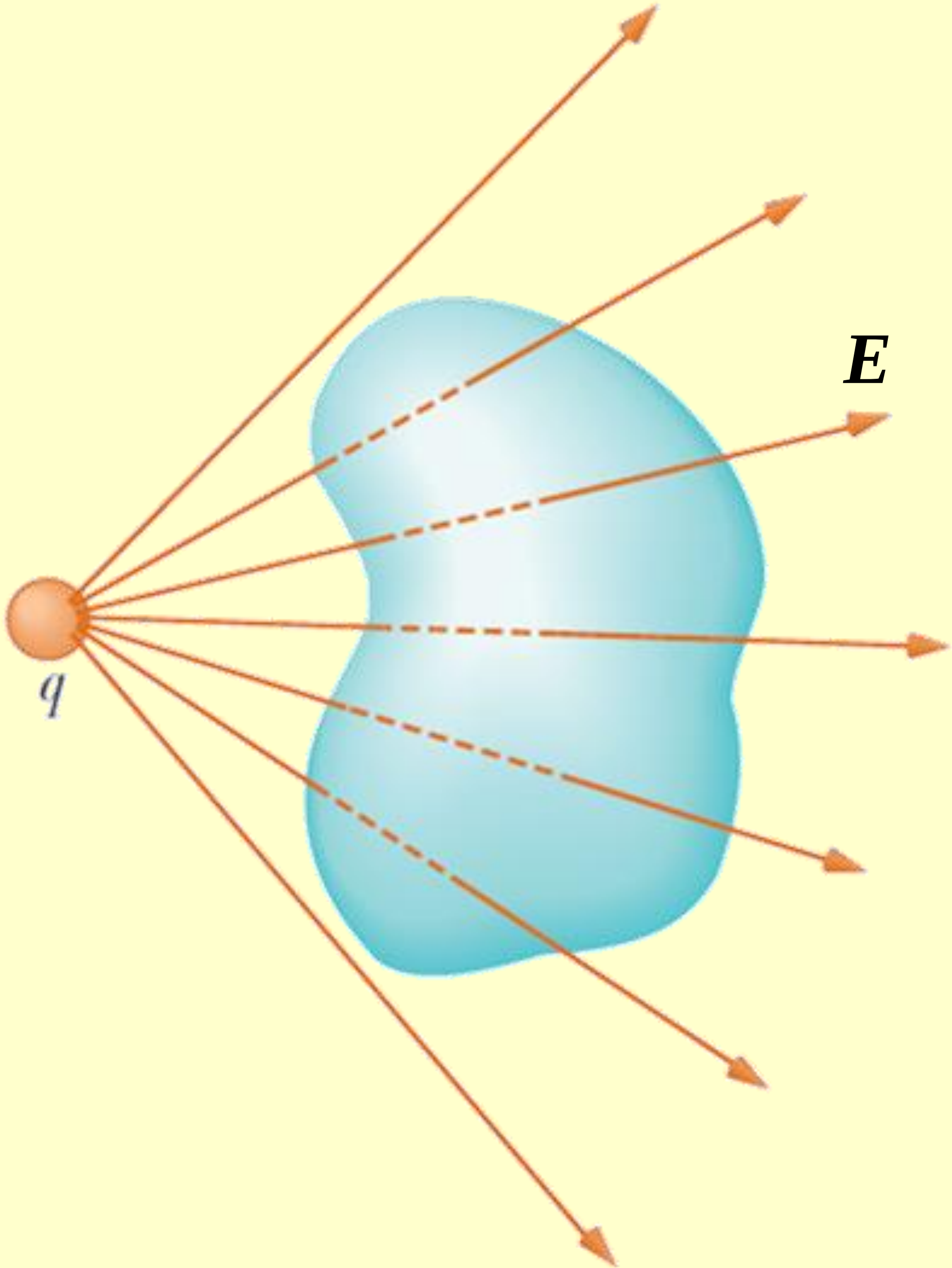


$\Delta\vec{\mathbf{A}}_i$
θ_i
$\vec{\mathbf{E}}_i$

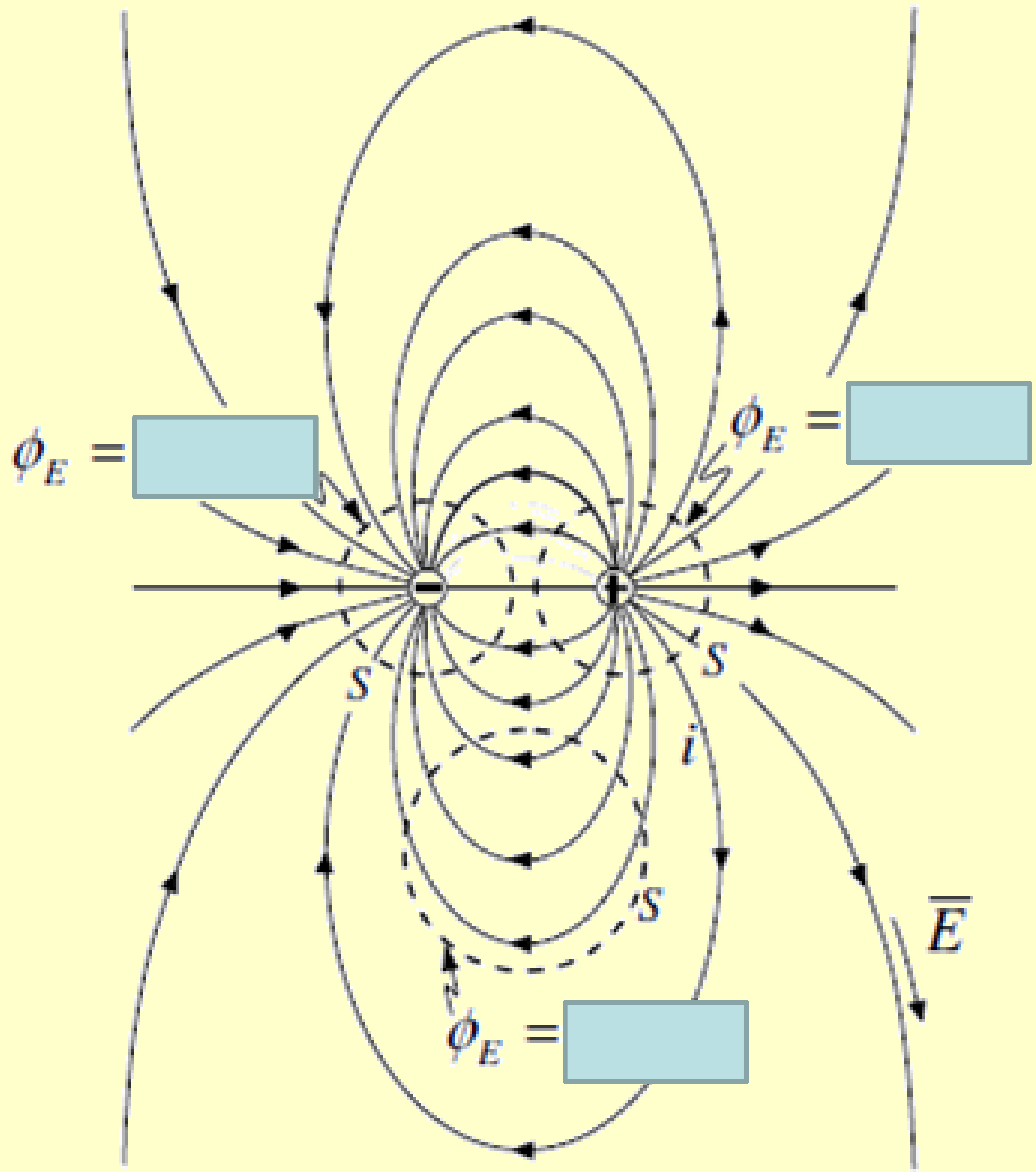

S_3
S_2
S_1
q



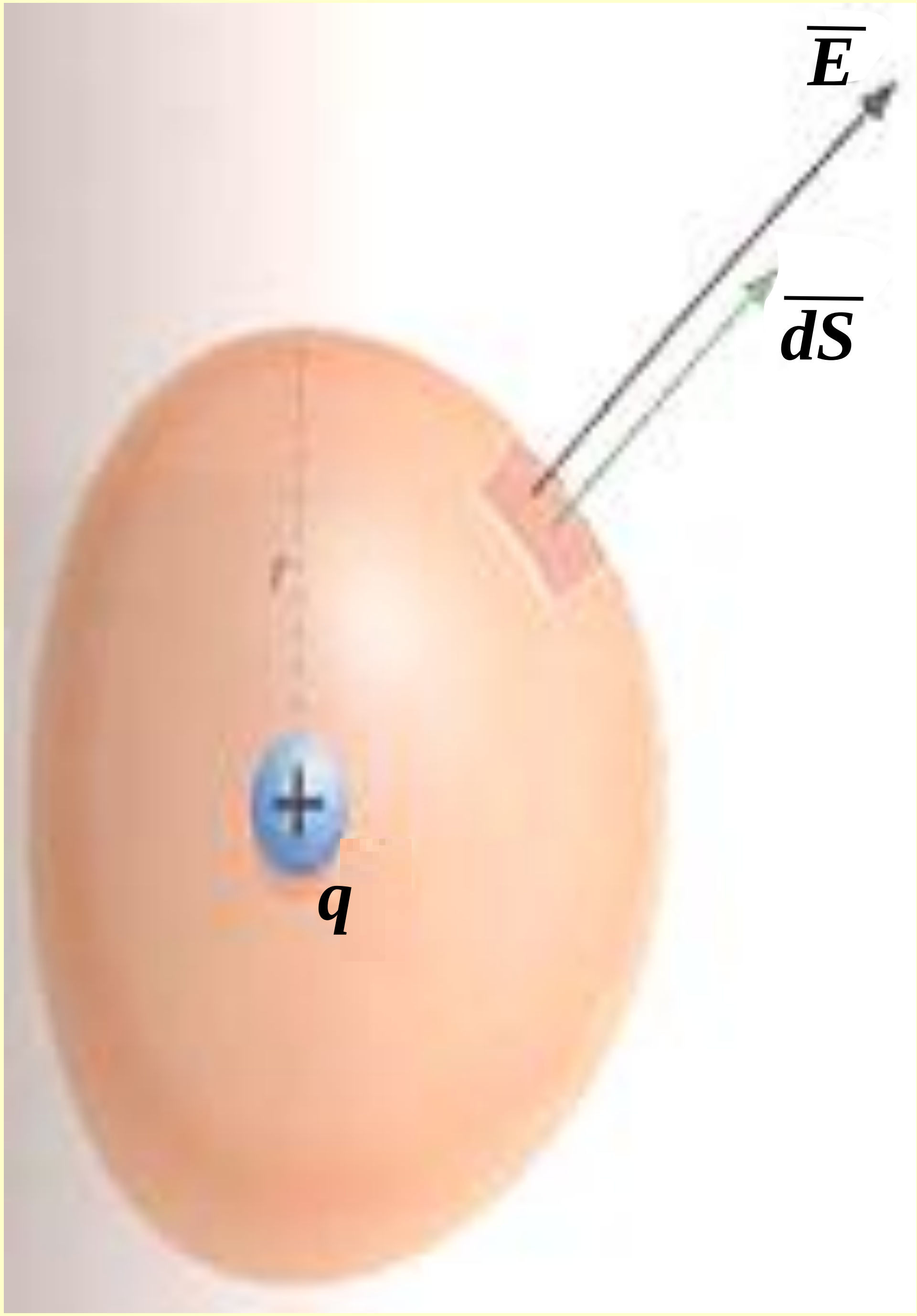


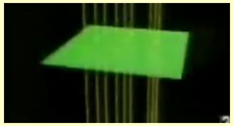


E
q



$\phi_E =$
$\phi_E =$
$\phi_E =$
S
S
S
i
$\overline{E}$


$\overline{E}$
$\overline{dS}$
q



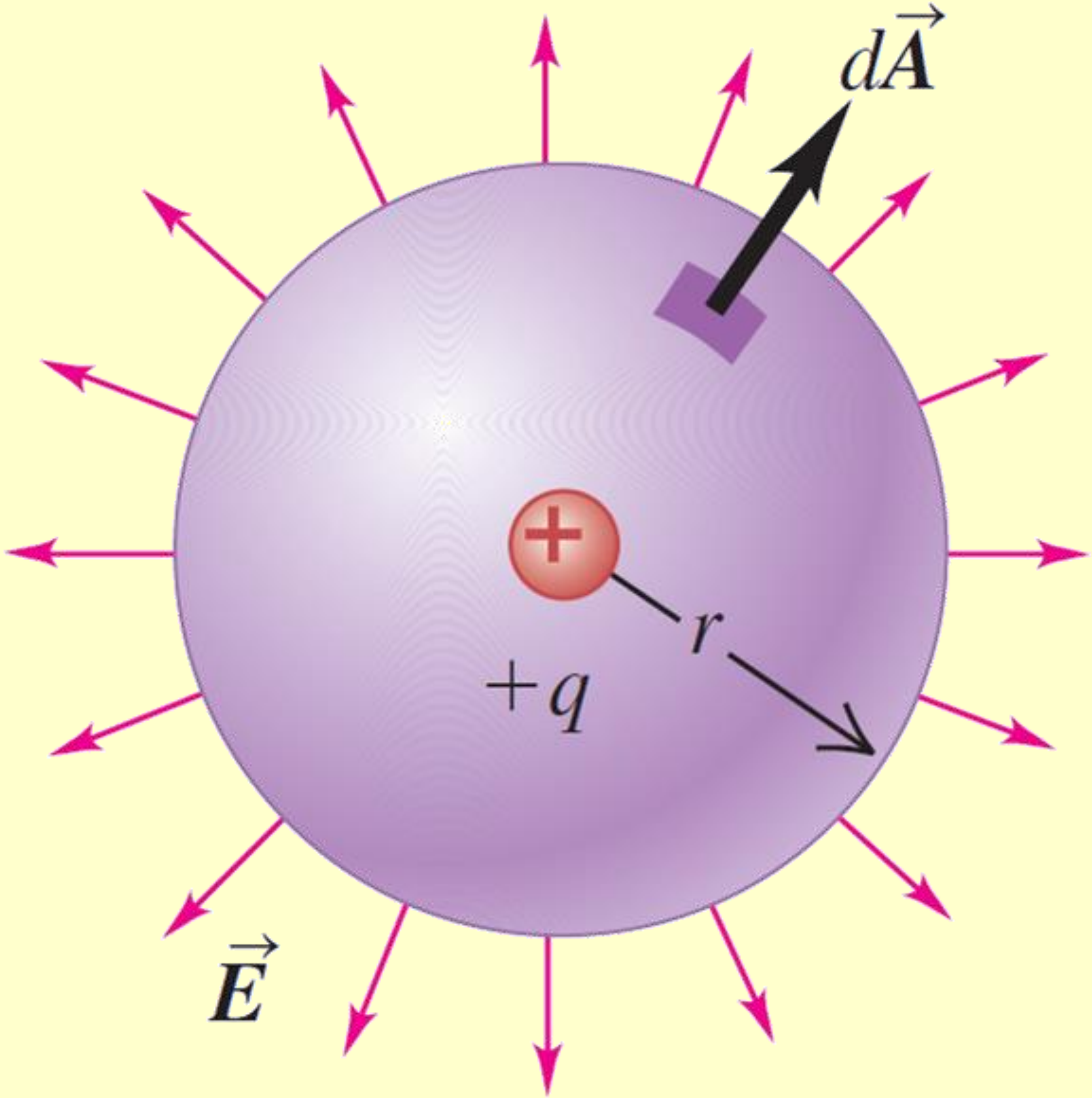
Estrategias particulares para problemas Ley de Gauss

Primero, **elija una superficie gaussiana que tenga una simetría que coincida con la distribución de la carga**. Para cargas puntuales o distribuciones de carga simétricas esféricamente, la superficie gaussiana debe ser una esfera centrada en la carga. Para líneas de carga uniforme o cilindros cargados uniformemente, su elección de superficie gaussiana debe ser una superficie cilíndrica que sea coaxial con la línea de carga o con el cilindro. Para láminas de carga que tienen simetría plana, la superficie gaussiana debe ser un cilindro que atraviese la lámina. Advierta que en todos los casos, **la superficie gaussiana se elige de manera tal que el campo eléctrico tiene la misma magnitud en todos los puntos sobre la superficie y está dirigido perpendicularmente a la superficie**. Esto le permitirá evaluar con facilidad la integral de superficie que aparece en el lado izquierdo de la ley de Gauss, la cual representa el flujo eléctrico total a través de esa superficie.

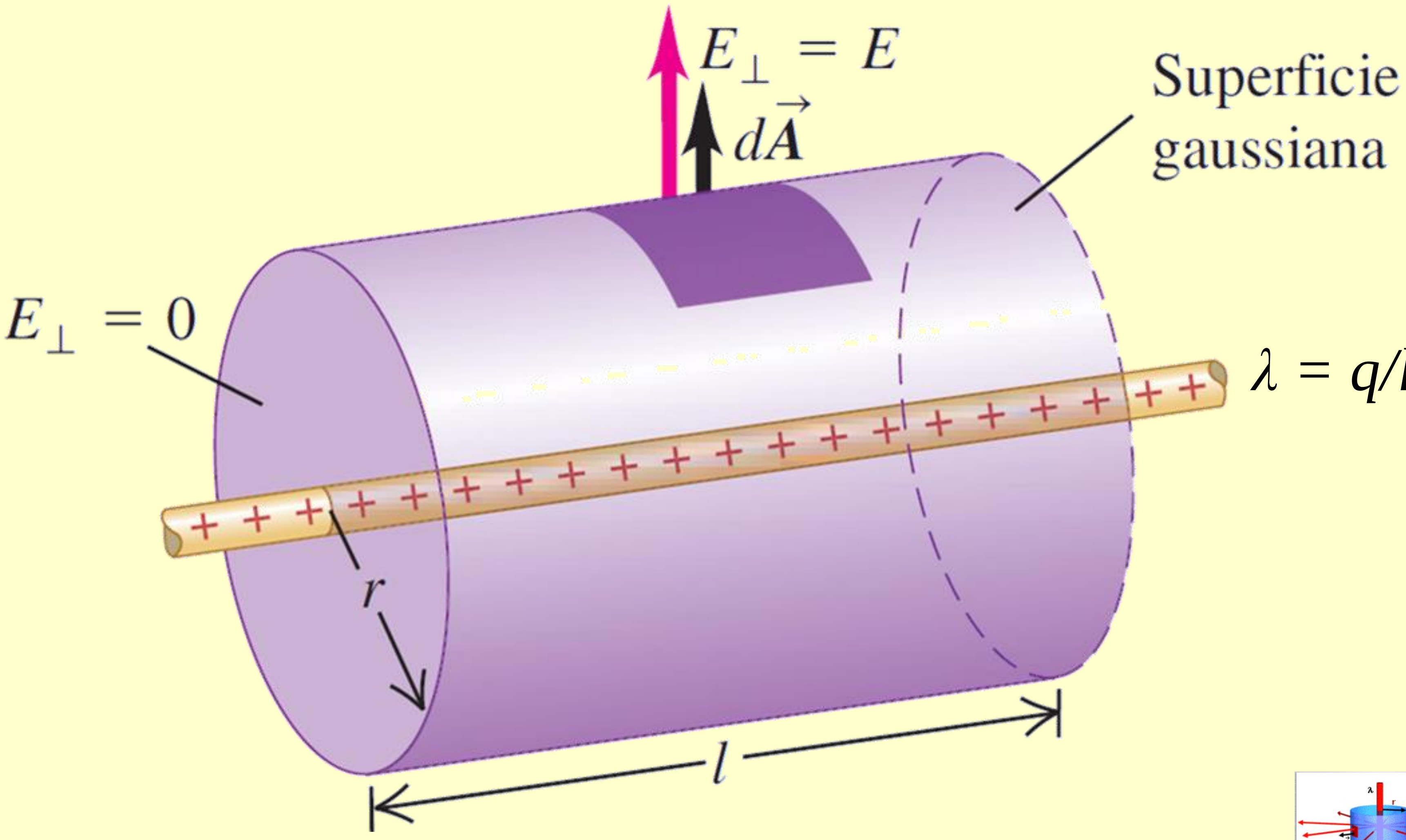
Evalúe después el lado derecho de la ley de Gauss, lo cual equivale a **calcular la carga eléctrica total dentro de la superficie gaussiana**. Si la densidad de carga es uniforme, como suele ser el caso (es decir, si l, s, o r son constantes), multiplique simplemente la densidad de carga por la longitud, el área o el volumen encerrado por la superficie gaussiana. Sin embargo si la distribución de carga no es uniforme, usted deberá integrar la densidad de carga sobre la región encerrada por la superficie gaussiana. Por ejemplo, si la carga se distribuye a lo largo de una línea, debe integrar la expresión $dq = \lambda \,.\, dx$, donde dq es la carga en un elemento infinitesimal dx y λ es la carga por longitud unitaria.

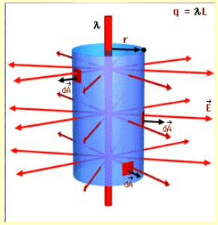
Una vez que los lados derecho e izquierdo de la ley de Gauss se han evaluado, usted puede calcular el campo eléctrico sobre la superficie gaussiana suponiendo que la distribución de carga se da en el problema. Inversamente, si conoce el campo eléctrico, usted puede calcular la distribución de carga que produce el campo.

Campo Eléctrico creado por una CARGA PUNTUAL



Campo Eléctrico creado por una **DISTRIBUCIÓN DE CARGA LINEAL** **uniforme de longitud infinita**





2-5-1. **Campo eléctrico creado por una distribución de carga lineal uniforme de longitud infinita**

Partiendo del dibujo 2-11, llamamos $\delta = q/x = dq/dx$ [coul/metro] a la cantidad de carga por unidad de longitud.

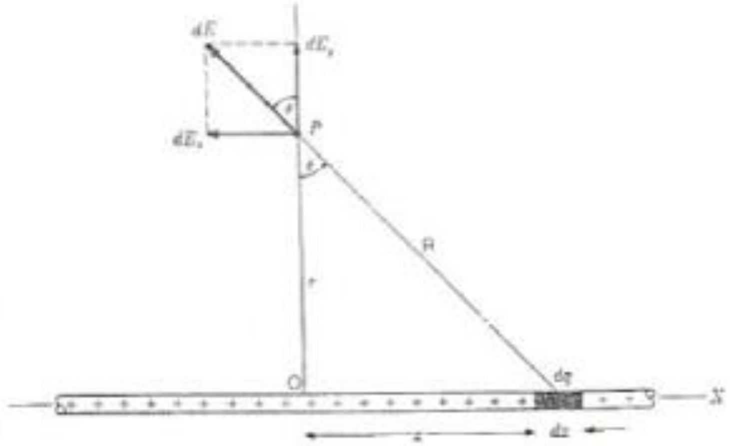


Figura 2-11

Calcularemos el campo eléctrico en el punto P a una distancia r de la línea.

La carga $dq = \delta\ dx$ crea en el punto P un campo eléctrico dE cuyo módulo es

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{l^2}$$

Las componentes del vector dE son dE_x y dE_y cuyos módulos son

$dE_x = -\ dE\ \text{sen}\theta$ (el signo menos indica que dE_x apunta en la dirección negativa del eje x)

$dE_y = +\ dE\ \cos\theta$

Las componentes según x e y del E son E_x y E_y cuyos módulos son

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} dE\ \text{sen}\theta$$

el cual debe ser nulo debido a que cada elemento de carga de la derecha tiene un elemento de carga correspondiente en la izquierda tal que sus contribuciones al campo en la dirección x se anula, y

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} dE \cos\theta$$

En consecuencia, E apunta en la dirección del eje y. Entonces el módulo de E es

$$E = E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{l^2} \cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta\, dx}{r^2 + x^2} \cos\theta$$

Como θ y x no son independientes, para poder integrar nos independizaremos de una de ellas

$$x = r \operatorname{tg}\theta$$

derivando esta expresión respecto a θ, tenemos

$$dx = \frac{r}{\cos^2\theta}\, d\theta$$

además del dibujo 2-11, obtenemos

$$r^2 + x^2 = r^2 + r^2 \operatorname{tg}^2\theta = r^2 \left(1 + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\right) = r^2 \frac{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$r^2 + x^2 = \frac{r^2}{\cos^2\theta}$$

reemplazando

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \delta \cdot \frac{\dfrac{r}{\cos^2\theta}\, d\theta}{\dfrac{r^2}{\cos^2\theta}} \cdot \cos\theta$$

$$E = \frac{\delta}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\theta \; d\theta$$

$$E = \frac{\delta}{4\pi\epsilon_0 r} \left| \operatorname{sen}\theta \right|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{\delta}{4\pi\epsilon_0 r} \cdot 2$$

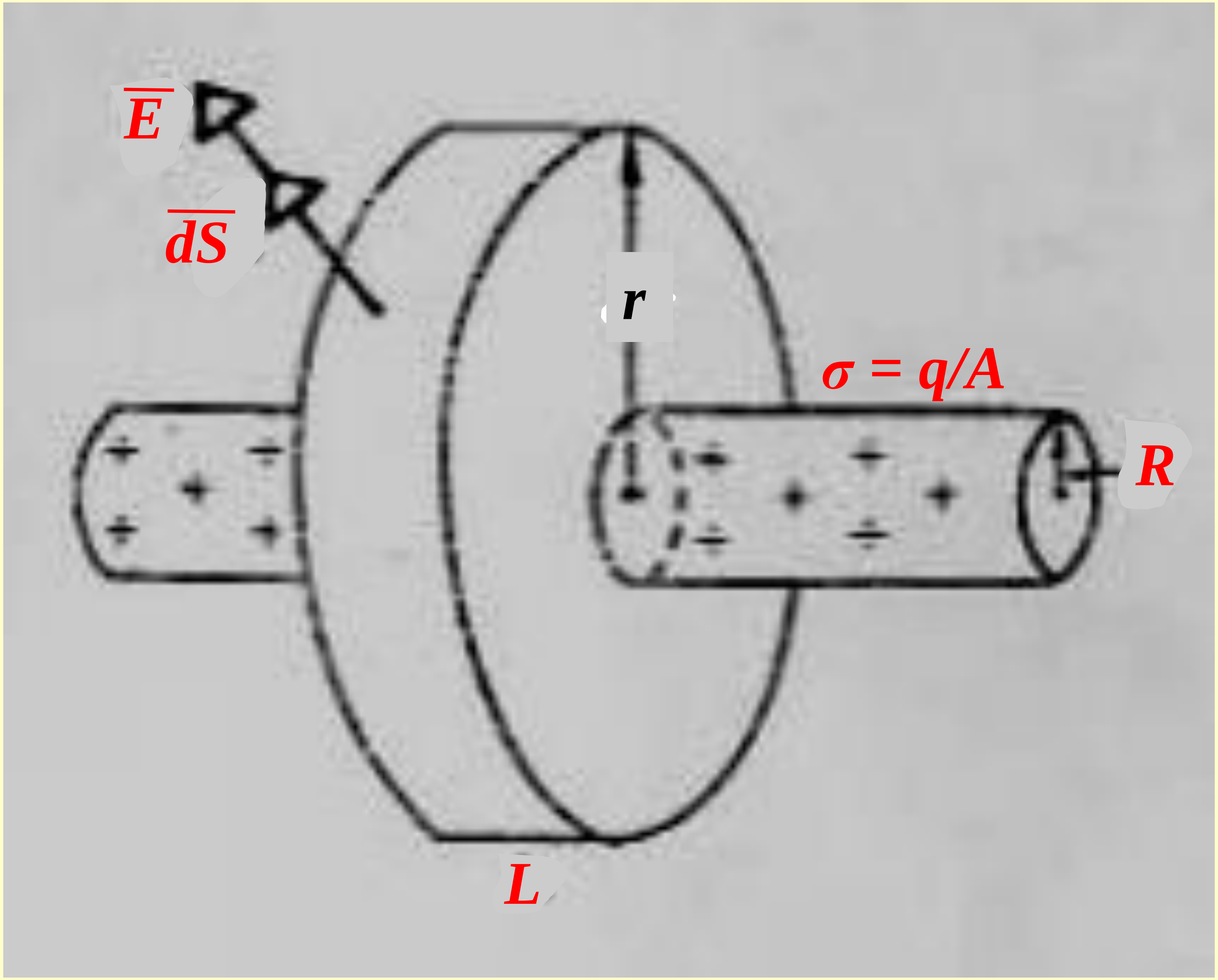
$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\delta}{r} \qquad (2\text{-}8)$$

expresando la ecuación 2-8 de manera vectorial, obtenemos

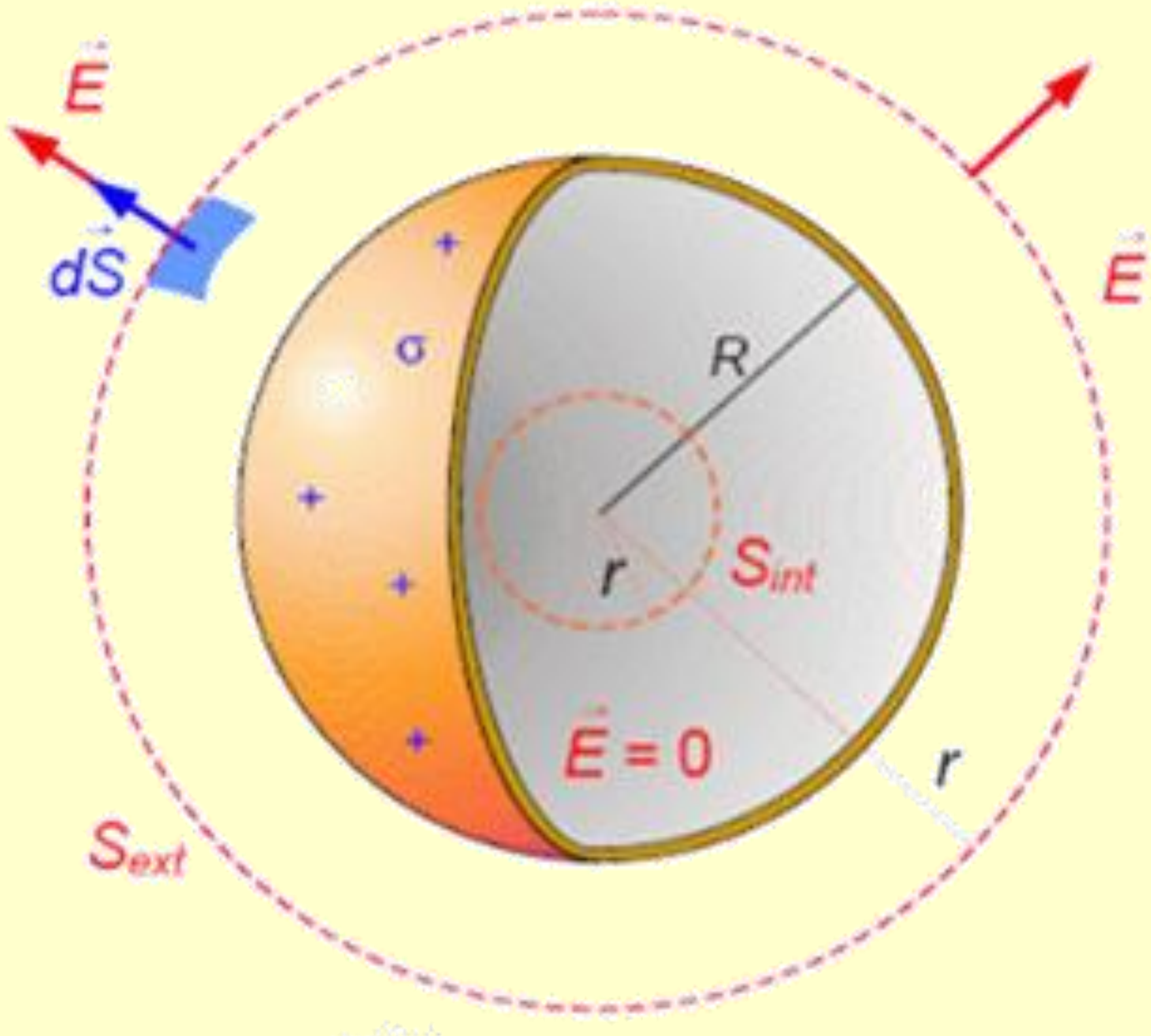
$$\bar{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\delta}{r} \; \hat{r}_N \qquad (2\text{-}9)$$

en donde r_N es el vector unitario que señala desde O a P.

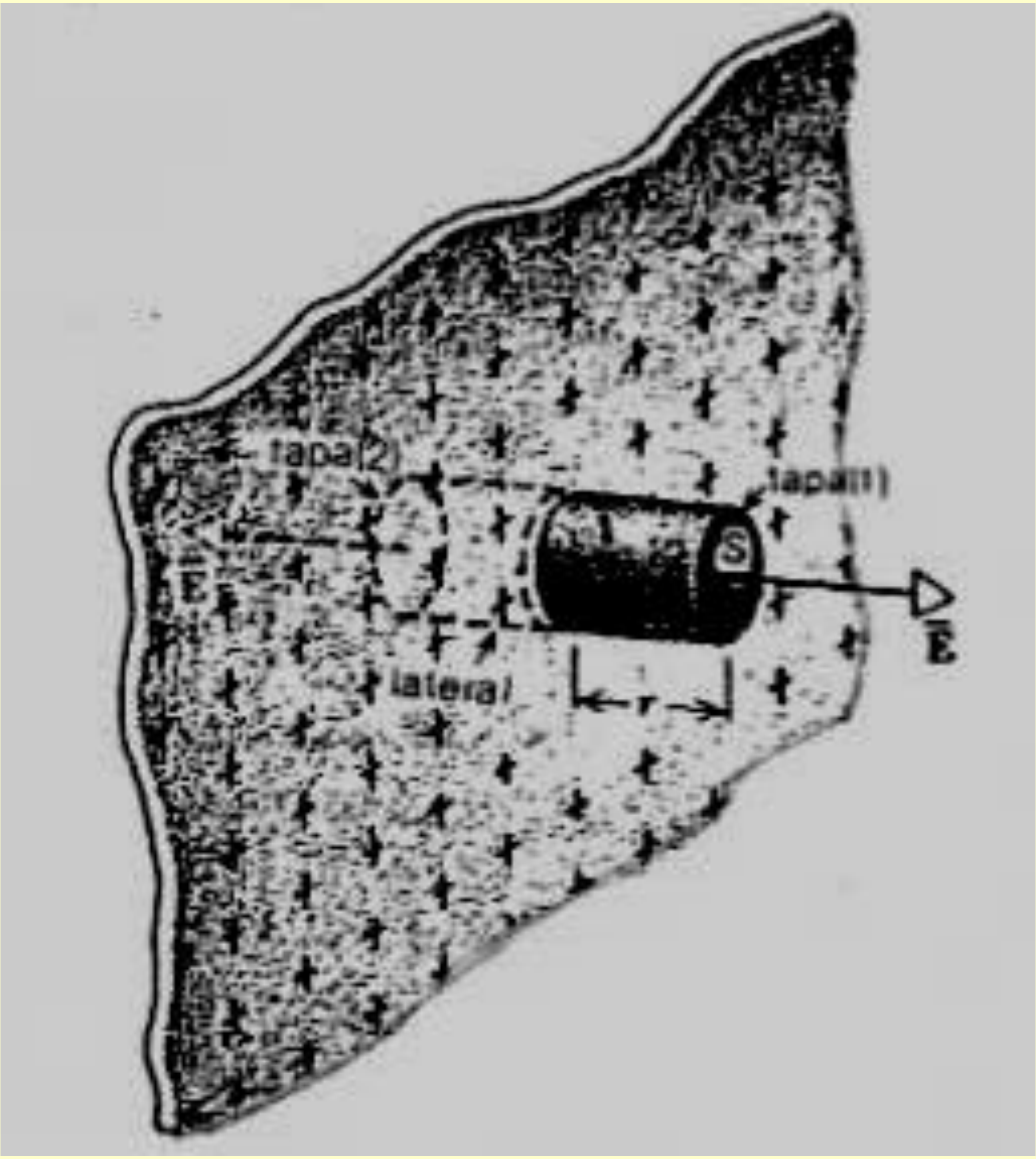
Campo Eléctrico creado por un CILINDRO CONDUCTOR DE LONGITUD INFINITA con carga distribuida

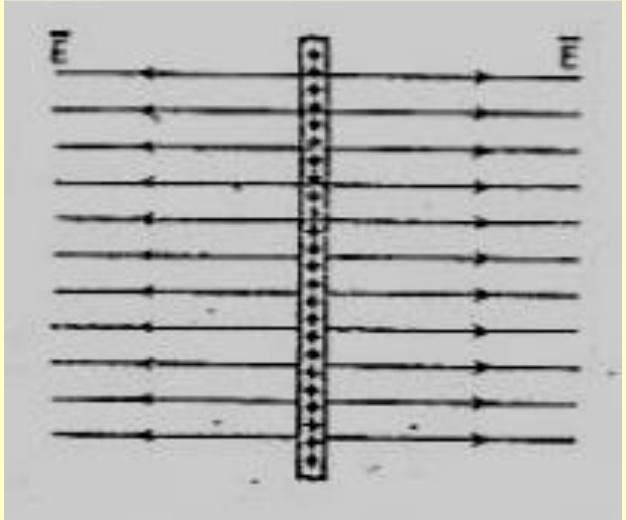


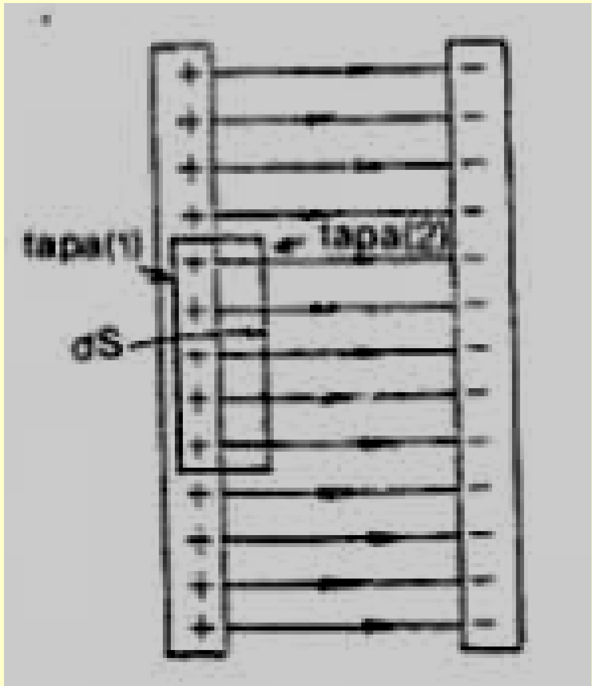
Campo Eléctrico creado por una ESFERA CONDUCTORA cargada uniformemente

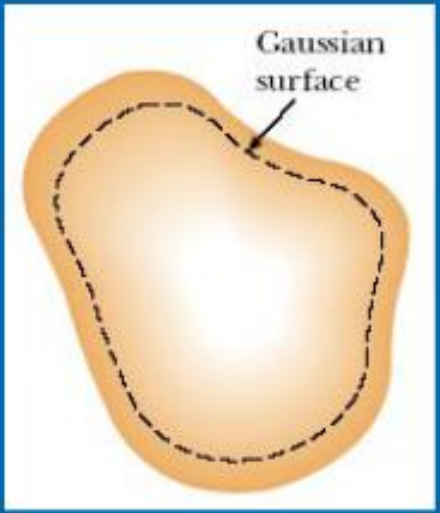


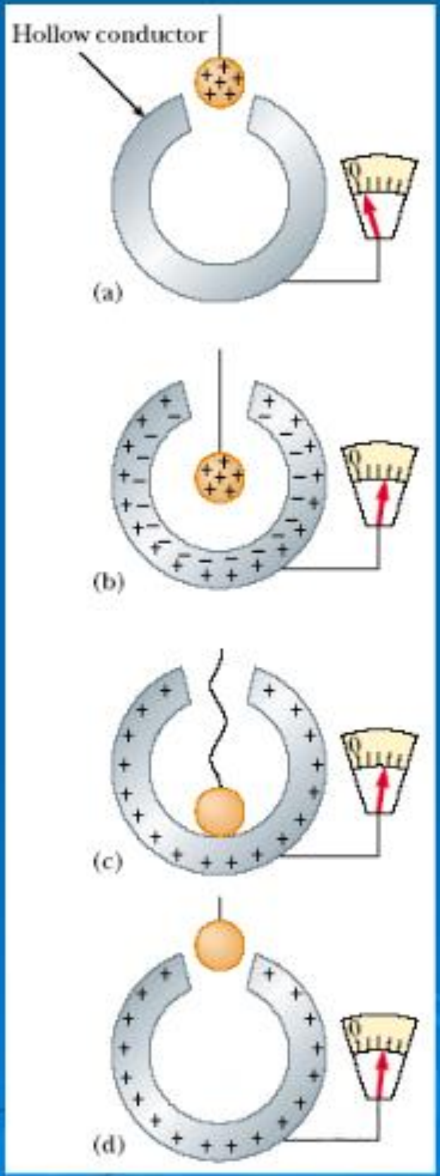
Campo Eléctrico creado por una PLACA CONDUCTORA infinita cargada superficialmente





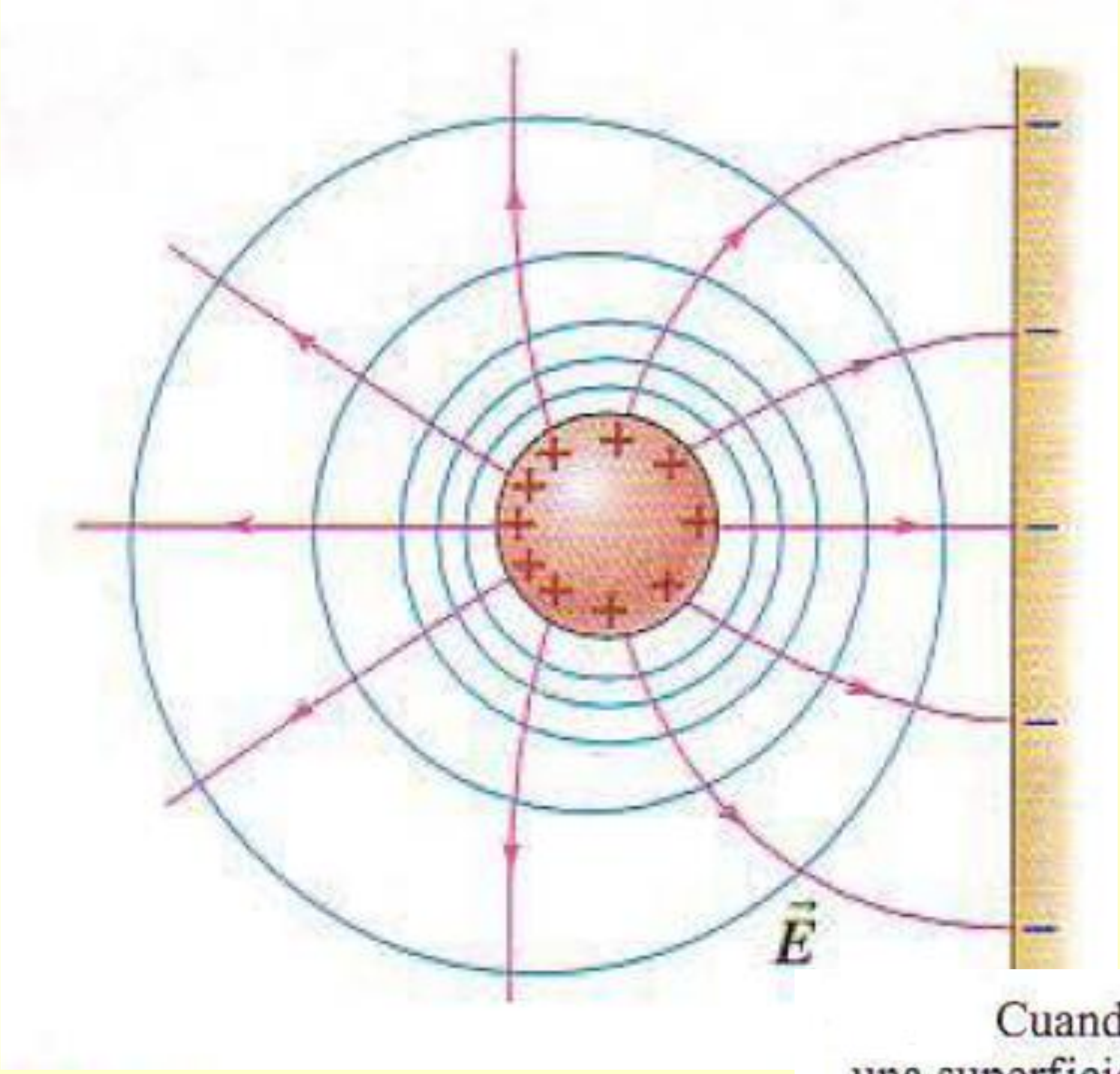




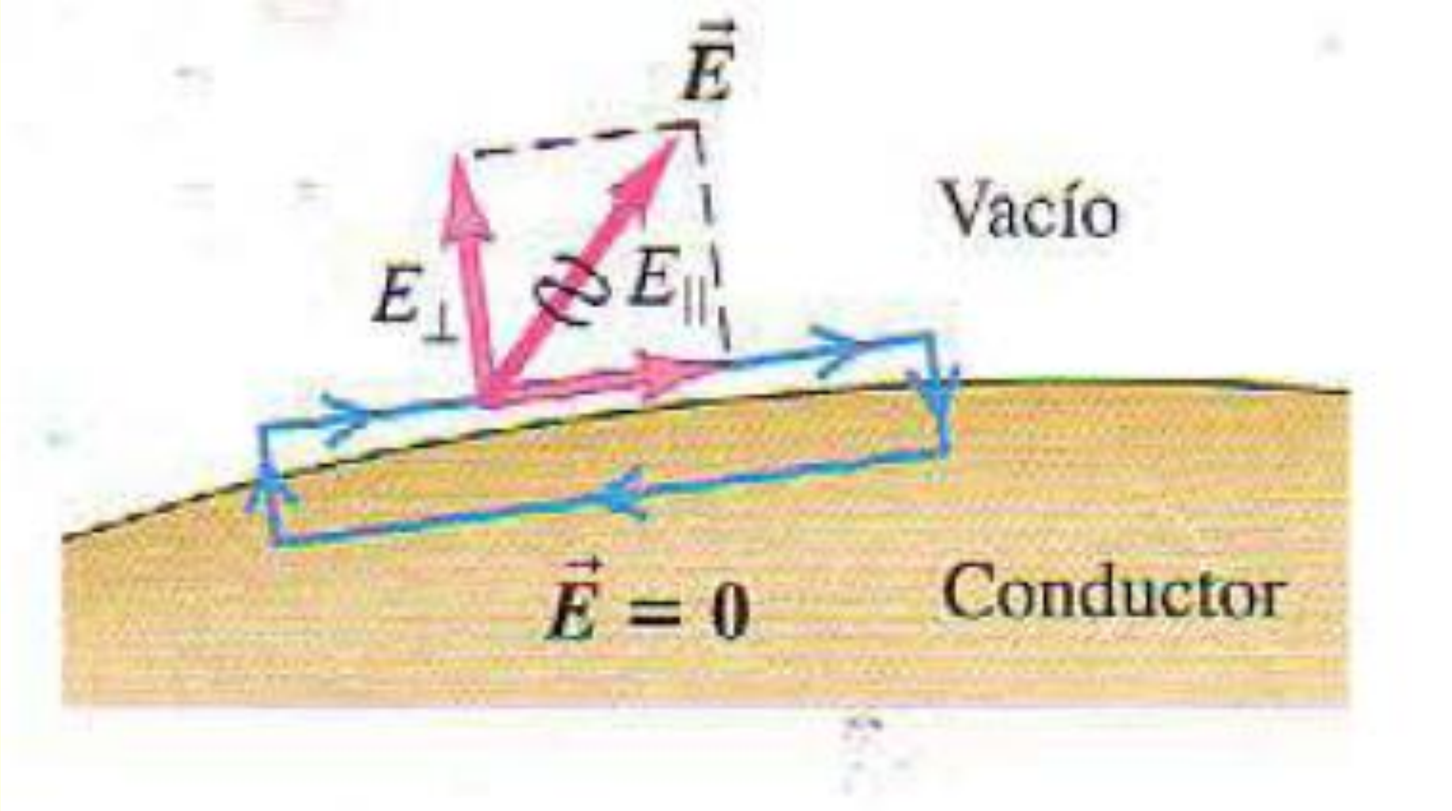


- No existe campo al interior de ningún cuerpo conductor cargado en equilibrio electrostático

- Dentro de un cuerpo aislante cargado puede existir campo eléctrico



Cuando las cargas están en reposo, una superficie conductora es siempre una superficie equipotencial. Las líneas de campo (en rojo) son perpendiculares a una superficie conductora.



Adentro del conductor, $\vec{E} = 0$. Si $\vec{E}$ inmediatamente afuera del conductor tuviese una componente $E_\parallel$ paralela a la superficie del conductor, entonces el campo realizaría un trabajo total diferente de cero sobre una carga de prueba que recorre la espira rectangular y vuelve al punto de partida.

Debido a que el campo $\vec{E}$ es conservativo, esto es imposible. Por consiguiente, $E_\parallel$ debe ser cero y $\vec{E}$ inmediatamente afuera de la superficie debe ser perpendicular a ella.